eXamengevat

Wiskunde B VWO

Toegang tot de online oefenomgeving – Wiskunde B VWO

Gefeliciteerd, je hebt een gigantisch grote stap gezet richting het halen van je eindexamen! Je hebt de eXamengevat bundel met alle examenstof in je handen. Je kan aan de gang!

Naast leren is **oefenen** natuurlijk minstens zo belangrijk! Ook in dat opzicht heeft eXamengevat meer dan genoeg te bieden. Per vak hebben we een paar honderd oude examenvragen op **onze oefenomgeving** staan. Een paar voordelen van deze oefenomgeving:

- ✓ De vragen staan **gecategoriseerd per domein**! Je kunt dus heel specifiek oefenen op de domeinen waar jij nog wat zwakker in bent.
- ✓ De oefenomgeving bevat een **instaptoets**, zodat je een overzicht krijgt in welke domeinen je sterk bent en in welke niet. Handig om te doen voordat je begint met leren, zodat je weet waar je staat!
- ✓ De **uitwerkingen zijn véél uitgebreider** dan op Examenblad. Alle stappen worden beschreven, zodat je altijd kunt zien waar het fout gaat, als je de vraag niet begrijpt.

Hoe krijg ik toegang tot de online leeromgeving?

We hebben een stappenplan voor je opgesteld, afhankelijk van waar je eXamengevat hebt gekocht.

Optie 1: ik heb mijn samenvattingen op www.examengevat.nl besteld.

Indien je jouw bestelling **via onze website www.examengevat.nl** hebt gedaan, volg dan de volgende stappen:

Stap 1: als het goed is heb je bij je aankoop automatisch een account gemaakt. Zo niet, maak deze dan eerst aan MET HET MAILADRES WAARMEE JE DE BESTELLING HEBT GEDAAN!

Stap 2: Log in met je account.

Stap 3: Ga naar Mijn Leeromgeving op onze website (www.examengevat.nl/mijn-leeromgeving) en naar je studie.

Stap 4: Als het goed is staat er bij de vakken die je hebt aangeschaft “Ingeschreven” en heb je toegang!

Mocht dit nu niet lukken, volg dan onderstaande stappen bij optie 2.

Optie 2: ik heb mijn samenvattingen ergens anders besteld (bijvoorbeeld Bol.com, Amazon of in de winkel).

Indien je jouw bestelling ergens anders hebt gedaan, volg dan onderstaande stappen:

Stap 1: Maak eerst een account aan op www.examengevat.nl/account.

Stap 2: Log in met je gloednieuwe account.

Stap 3: Ga naar Mijn Leeromgeving op onze website (www.examengevat.nl/mijn-leeromgeving). Ga naar je studie.

Stap 4: Als het goed is staat er bovenaan een knop **Licentiecode verzilveren**. LET OP, DEZE STAAT ER ALLEEN ALS JE BENT INGELOGD! Vul daar onderstaande, unieke licentiecode in:

FBKDAN

Stap 5: Je hebt toegang!

Mocht je er na deze stappenplannen nou nog niet uitkomen, neem dan even contact met ons op. Je kunt ons bellen/ appen op 010 311 0038 of mailen op klantenservice@examengevat.nl.

Onze fantastische wiskunde schrijfster op wie we altijd konden rekenen: Hilde Jansen
Controlerend vakdocent en ware gentlemen met zijn imposante snor en Citroën 'Snoek': Wilfried Wolterink
Spelfoutdetective, taalmonster en schaduwlezer Tekst: Renee Persoon
Die achter hun broek werden gezeten door projectmanager: Larissa Risseeuw
Creatieve tekentafelgeniën achter de vormgeving: 88Design, Mediacooks
Onder toeziend oog van beginbaas: Jeroen Willemsen
Ons adres voor kaarten, taarten en huwelijksaanzoeken na het slagen voor je eindexamens:
Tolhuisstraat 12A
3072LT Rotterdam
En onze website voor meer moois: www.examengevat.nl

Onze klantenservice is één appje verwijderd, scan onderstaande QR-code!

Welkom in de eXamengevat van:

Wiskunde B – VWO

Voorwoord van de eigenaar

Waarschijnlijk staat hij ergens in de hoek van de schuur. Of misschien wel op zolder, of ergens anders weggestopt in huis. Maar één ding is zeker! Na je eindexamens moet hij wapperen naast je voordeur met je schooltas eraan: **de vlag**! En wij van eXamengevat gaan je helpen om dit voor elkaar te krijgen!

eXamengevat? Wat is dat nou? **eXamengevat is een samenvatting van alle stof die je moet kennen voor je eindexamen.** Niets meer, en niets minder. Als je dit boekje goed kent, dan ga je gewoon slagen.

"Mijn zusje miste een écht goede samenvatting voor haar eindexamens. Die ben ik gaan maken"

Het idee voor eXamengevat kwam toen mijn zusje eindexamen deed. Ik zag hoe ze in de laatste paar maanden van het examenjaar alle stof van haar hele middelbare schooltijd moest doornemen. Dat vond ze lastig, met name om een goed overzicht te krijgen van alle stof. En omdat het zo enorm veel is, wist ze ook niet precies wat nou belangrijk was en wat niet. Twee weken lang hebben we elke dag in de bieb gezeten en hard gewerkt met zijn tweeën. En jawel, uiteindelijk is ze geslaagd en kon de vlag uit!

Toen ik mijn zusje hielp, viel het me op dat er niet één goede samenvatting is waar alle stof overzichtelijk in werd uitgelegd. Dat miste ik toen enorm, het zou het leven van mijn zusje en al haar leeftijdsgenoten een stuk makkelijker hebben gemaakt. Een nieuw idee was geboren: **ik wilde dé allerbeste samenvatting maken voor de eindexamens in Nederland.**

"Alles wat je nodig hebt om te slagen voor je examen staat in één boekje"

Dus ging ik op onderzoek uit! Want, hoe moet dé perfecte samenvatting er nou uit zien? Die vraag stelde ik aan tientallen leerlingen, docenten en schooldirecteuren en zelfs het College van Toetsen en Examens, waar de examens worden gemaakt. Het resultaat van ruim 2 jaar werk ligt voor je neus.

Het doel van eXamengevat is simpel: **meer dan eXamengevat heb je niet nodig om te slagen voor je eindexamen!** Alle theorie, examenopgaven met uitgebreide antwoorden, oefenexamens… Alles wat je nodig hebt, staat in één boekje.

Voor nu wens ik je heel veel succes bij de voorbereidingen voor je eindexamens. Wij hebben heel erg ons best gedaan om slagen voor jou zo makkelijk mogelijk te maken. Nu is het jouw beurt. Als jij netjes door dit verslag heen gaat, alle theorie leest en alle opgaven maakt en snapt, dan ga jij gewoon je examen halen. Wij weten dat je het kunt!

"Als je het eXamengevat boekje goed kent, dan ga je gewoon slagen"

Heel veel succes en groetjes!

Jeroen Willemsen
Eigenaar en beginbaas eXamengevat

Inhoudsopgave

eXamengevat gaat faalangst tegen!

"Hoe komt het dat de één fluitend de examenzaal in loopt, terwijl de ander nachten niet kan slapen van de spanning?"

Dat komt onder andere door **faalangst**… Wist je dat 20% tot 25% van de eindexamen kandidaten last heeft van faalangst? Er zijn elk jaar zo'n 200.000 scholieren die eindexamen doen (100.000 VMBO, 60.000 HAVO en 40.000 VWO), waarvan dus 40.000 scholieren met faalangst de gymzaal in gaan. Het wordt ook wel **examenstress** genoemd. Mocht jij dus ook last hebben van examenstress, dan ben je zeker niet de enige!

Dat willen we met eXamengevat tegengaan. Het is toch zonde dat je door faalangst minder presteert dan je daadwerkelijk in je hebt? Daarom zijn we, toen we het plan van eXamengevat aan het uitwerken waren, op bezoek geweest bij **professor Jan Derksen, klinisch psycholoog aan de Radboud Universiteit.** Professor Derksen is een autoriteit op het gebied van faalangst, en aan hem hebben gevraagd hoe we nou een samenvatting moesten schrijven die faalangst tegen gaat.

eXamengevat gaat faalangst tegen! Hoe we dat doen? Door ervoor te zorgen dat je steeds het gevoel hebt dat je de stof goed onder controle hebt! Daar zijn een aantal trucjes voor:

1. **We zorgen dat de stof goed afgekadert is**. We zorgen ervoor dat écht alles wat je moet kennen, in de samenvatting staat. Niets meer, en niets minder. Kortom, als je de tijd neemt voor eXamengevat en dit boekje goed kent, dan moet je gewoon kunnen slagen! ☺
2. **We slaan geen enkele stap over bij een uitleg of een uitwerking van een vraag**. Hoe raak je de aandacht kwijt in de klas? Als je docent te snel gaat! We schrijven daarom <u>alle</u> stappen op bij een uitleg, of bij een uitwerking van een vraag. Hoe klein of hoe logisch deze ook zijn.
3. **We werken met een opbouwende structuur**. We beginnen makkelijk en bouwen rustig op. Zowel in de theorie, als in de oefenopgaven.

Duurzaamheid en CO2 uitstoot

We hebben ons best gedaan om de samenvattingen zo **klimaatneutraal** mogelijk te laten drukken. Maar eerlijk is eerlijk, 100% klimaatneutraal produceren is niet mogelijk… Samenvattingen worden gedrukt op papier, en er komt nou eenmaal CO2 vrij bij de productie van papier. We hebben daarom bewust gekozen om onze samenvattingen op 100% gerecycled papier te laten drukken (ja, ook dit velletje!). Dit papier is **FSC-gecertificeerd.** Dat keurmerk krijg je niet zomaar, alleen papier (en hout) dat afkomstig is uit verantwoordelijk beheerde bossen krijgen een FSC label.

FSC
www.fsc.org
FSC® C144797

Het keurmerk voor verantwoord bosbeheer

eXamengevat: hoe werkt dat?

Wacht even…sla dit niet over! We snappen dat je meteen aan de slag wilt gaan, maar lees eerst deze pagina even, zodat je weet hoe eXamengevat werkt.

Domeinen

Misschien wist je het al, maar alle vakken op de middelbare school zijn opgedeeld in **domeinen**. De domeinen worden vastgesteld door de overheid en geven precies aan welke stof er op het ***schoolexamen*** (SE) en op het ***centraal examen*** (CE) mag worden getoetst.

eXamengevat behandelt alle domeinen die verplicht zijn voor het Centraal Examen (CE). We gaan domein per domein af en leggen stapje voor stapje alle stof uit die je moet kennen!

In feite is het heel simpel:

Als jij de stof van alle domeinen in eXamengevat goed kent, dan ken je ook alle stof waarover vragen kunnen komen op het eindexamen.

Structuur per domein

Per domein gebruiken we de volgende structuur:

- **Theorie**
- **Voorbeeldopgaven**
- **Oefenopgaven**

We leggen dus eerst de **theorie** aan je uit. Dat doen we in onze ***vertellende schrijfstijl***, we schrijven alsof we een verhaal vertellen en gebruiken voorbeelden om de stof tot leven te laten komen.

Daarna laten we door middel van een **voorbeeldopgave** meteen zien hoe je deze stof moet toepassen.

Daarna mag je zelf aan de bak en ga je de **oefenopgaven** maken over dit specifieke domein!

Aan het eind van het eXamengevat verslag staan **één of meerdere volledige examens**. Hiermee kun je alle stof van alle domeinen in één keer oefenen.

Video’s

Soms zegt een **video** meer dan 1000 woorden. Daarom gebruiken we video’s om bepaalde lastige onderwerpen uit te leggen. Dat is handig, omdat je sommige stof gewoon sneller snapt als je het “ziet”.

Als je de volgende QR code ziet, dan hoort er bij de theorie die je net gelezen hebt een filmpje:

Om deze QR code te scannen, heb je een app nodig op je telefoon die dat voor je doet:

- De **App Store** (Apple) en **Google Play** (Android) staan vol van dit soort QR-scanners. Als je op "QR" zoekt, dan kom je tientallen gratis apps tegen die QR codes kunnen scannen.
- Bij sommige telefoons leest de **camera** automatisch QR-codes.

Als je de QR code scant, linkt deze je automatisch door naar het goede filmpje! Handig hè?

Nog moeite met een bepaald onderwerp?

Kom je er gaandeweg achter dat je nog moeite hebt met een bepaald onderwerp van het vak, pak dan je boek er even bij en zoek het desbetreffende hoofdstuk op. Dan kun je het nog eens rustig en uitgebreid nalezen!

Kortom… Alles wat je nodig hebt om te slagen staat in dit boekje!

En dat is precies ons doel! Vergeet niet, meer dan de stof uit deze domeinen kunnen ze niet vragen. Ken je dus al deze stof, dan gaat het gewoon goed komen en ga je slagen!

Dus… daar gaan we! Pak je pen en markeerstift, vul je flesje met water en ga er maar goed voor zitten.

Examentips

De onderstaande **examentips** helpen je bij het maken van het examen. Lees ze rustig door. Sommige tips zijn heel logisch, maar het is goed om ze even gezien te hebben.

Een examen halen gaat niet alleen over het kennen van de examenstof zelf, maar ook hoe je een examen op een slimme manier kunt halen. Een examen is vaak niet meer dan zoveel mogelijk punten halen in drie uur!

1. **Denk aan de tijd!**

Een examen is **tijdmanagement**. In drie uur tijd moet je zoveel mogelijk punten zien te behalen. Aan de ene kant moet je natuurlijk zorgen dat je de stof door en door kent. Aan de andere kant is het handig om te weten hoeveel vragen je bijvoorbeeld per uur moet maken. Op deze manier heb je tijd voor alle opgaven en kom je niet in **tijdnood**.

Het examen duurt dus drie uur. Stel dat het examen uit 30 vragen bestaat. Dat betekent dat je per uur 10 vragen moet maken. Heb je na één uur 8 vragen gemaakt? Dan moet je het tempo opschroeven! Heb je na één uur 12 vragen gemaakt? Het tempo zit er lekker in! Je kunt de komende twee uur iets rustiger aan doen.

De onderstaande afbeelding is afkomstig van het voorblad van het examen:

> Dit examen bestaat uit 30 vragen.
> Voor dit examen zijn maximaal 57 punten te behalen.
> Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

2. **Begin met de opgave die jij het makkelijkst vindt**

Een examen bestaat meestal uit opgaven met daarin een aantal (deel)vragen. Elke opgave is toegespitst op één of meerdere domeinen. Heb je altijd al moeite gehad met een bepaald domein? Sla dit domein voorlopig even over! Pak een opgave die je makkelijker vindt.

Bedenk je dat je zo snel mogelijk genoeg punten moet halen voor, in ieder geval, een voldoende (5,5). Als je begint met een moeilijke opgave waar je niet uitkomt, kan dat ervoor zorgen dat je in **tijdnood** komt. Begin daarom met een makkelijke opgave. Je zult bovendien zien dat je **vertrouwen** in de rest van het examen toeneemt als je begint met een relatief makkelijke opgave.

3. **Blader even rustig het examen door, voordat je begint**

Blader, voordat je daadwerkelijk begint, even vluchtig het examen door. Zo weet je wat er allemaal te doen is. Op deze manier kun je de voor jou makkelijke opgaven eerst kiezen, voordat je met de moeilijke opgaven begint.

4. **Herhaal de vraag in het antwoord**

Dit is een makkelijke manier om je antwoord mee te beginnen. Je zult zien dat je een antwoord eenvoudiger kunt formuleren als je je antwoord begint met (een deel van) de vraag.

5. **Bekijk je antwoord nog een keer nadat je antwoord hebt gegeven op een vraag**

Soms komt het voor dat je antwoord moet geven **met behulp van een berekening**. Vergeet dan niet af te sluiten met een conclusie! Je geeft dan eerst de berekening en sluit bijvoorbeeld af met: "Dus, ….

Soms wordt gevraagd of iets toe- of afneemt. Je kunt dan bijvoorbeeld niet alleen een berekening geven, je moet met een volzin afsluiten waarin je zegt of het toeneemt, en juist afneemt.

6. Geef antwoord op de vraag

Deze tip klinkt heel logisch, maar hier worden nog wel eens punten op verloren. Geef antwoord op de vraag! Als er gevraagd wordt om een berekening, geef die dan ook! Als er gevraagd wordt om twee redenen, geef dan twee redenen en <u>niet</u> drie! Als je drie redenen geeft, worden <u>alleen</u> de eerste twee redenen nagekeken. Denk hier dus aan!

De onderstaande afbeelding is afkomstig van het voorblad van het examen:

> Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd.
> Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

7. Afronden

Een geldbedrag ronden we meestal af op twee decimalen. Procenten ronden we meestal af op één decimaal. **Ga <u>niet</u> afronden in tussenstappen**! Afronden doe je pas bij je eindantwoord.

8. Verbeterde concentratie

Bananen en chocolade zorgen voor een betere concentratie tijdens het examen. Thee helpt om je te ontspannen. Drink <u>geen</u> energiedrankjes! Deze zorgen voor een kortetermijn*boost*, maar op de lange termijn daalt je concentratie.

9. Nachtrust

Zorg voor een goede nachtrust! Stop aan het einde van de avond dus met leren.

Zorg ook dat je op de dag van het examen niet te laat opstaat. Als het examen om 13:30 uur begint, is het niet handig om rond 12:00 uur op te staan. Je hersenen hebben namelijk tijd nodig om wakker te worden.

Geef jezelf ook de paar uur voor het examen wat rust. Je hersenen zijn kort voor het examen niet meer goed in staat informatie op te nemen. Ga dus niet een uur voor je examen nog allemaal nieuwe informatie in je hersenen stampen, dat zal alleen maar averechts werken!

10. Zorg voor voldoende ontspanning

Je kunt niet continu de hele dag door leren. Het is belangrijk om pauzes te houden en iets anders te doen. Ga buiten een rondje lopen voor wat frisse lucht. Na ontspanning zul je ook makkelijker nieuwe stof kunnen opnemen. Leer telkens maximaal een uur en neem daarna een korte pauze van bijvoorbeeld een kwartier.

11. Leer in een omgeving die het beste bij jou past

Nieuwe examenstof is het beste te leren in een rustige omgeving. Zorg voor weinig afleiding. Leg bijvoorbeeld je mobiele telefoon even weg. Zorg ervoor dat niemand je kan storen. Een vuistregel is:

"Je leert in 1 uur zonder afleiding net zoveel als in 4 uur wanneer je steeds afgeleid wordt!"

Zorg er ook voor dat het bureau waar je studeert schoon en opgeruimd is. Als dit niet het geval is, kun je worden afgeleid. Zorg dus voor een omgeving waar je echt kunt focussen op de examenstof.

Examentips specifiek voor je wiskunde B examen

Naast de algemene examentips, hebben we ook nog een aantal **specifieke tips voor je wiskunde B examen** voor je!

Tip 1
Neem een markeerstift mee en geef bij iedere opgave aan of je deze **exact**, dus algebraïsch moet oplossen, of dat je gebruik mag maken van een **grafische rekenmachine**.

Tip 2
Als je bij een opgave een **bewijs** moet geven, dan ga je altijd <u>exact</u> te werk.

Tip 3
Zorg dat je rekenmachine bij meetkundeopgaven op **graden** staat en bij sinusoïden moet de rekenmachine (meestal) op **radialen** staan. Zeker als er sprake is van een π in de opgave.

Tip 4
Blijf niet te lang nadenken over een meetkundeopgave. Maak eerst andere opgaven die je wel direct weet en bewaar die lastige opgave voor het eind.

Tip 5
Bij ieder eindexamen wiskunde B moet je wel de **kettingregel** gebruiken om een functie te differentiëren. Deze techniek moet je dus goed beheersen.

Tip 6
Maak zichtbaar gebruik van de uitwerkbijlage:

- Noteer al je gegevens in de meetkundetekening, geef even lange zijden of gelijke hoeken aan.
- Teken lijntjes in grafieken om ze nauwkeuriger te kunnen aflezen.

Tip 7
Als je klaar bent met een opgave, lees dan de vraag <u>nog een keer</u> door om te controleren of je echt antwoord gegeven hebt op de vraag. Vergeet ook niet om af te ronden op het **juiste aantal decimalen** als dit gevraagd wordt. Als er sprake is van een eenheid vergeet deze dan ook niet in je antwoord te vermelden.

Tip 8
Een opgave waar je veel punten mee kunt verdienen heeft ook veel denkstappen nodig. (Vier punten betekent meestal ook vier denkstappen)

Tip 9
Neem de juiste spullen mee. Vergeet niet wat te eten of drinken mee te nemen . Als je snel afgeleid wordt door allerlei geluiden om je heen neem dan oordopjes mee zodat je je beter kunt concentreren.

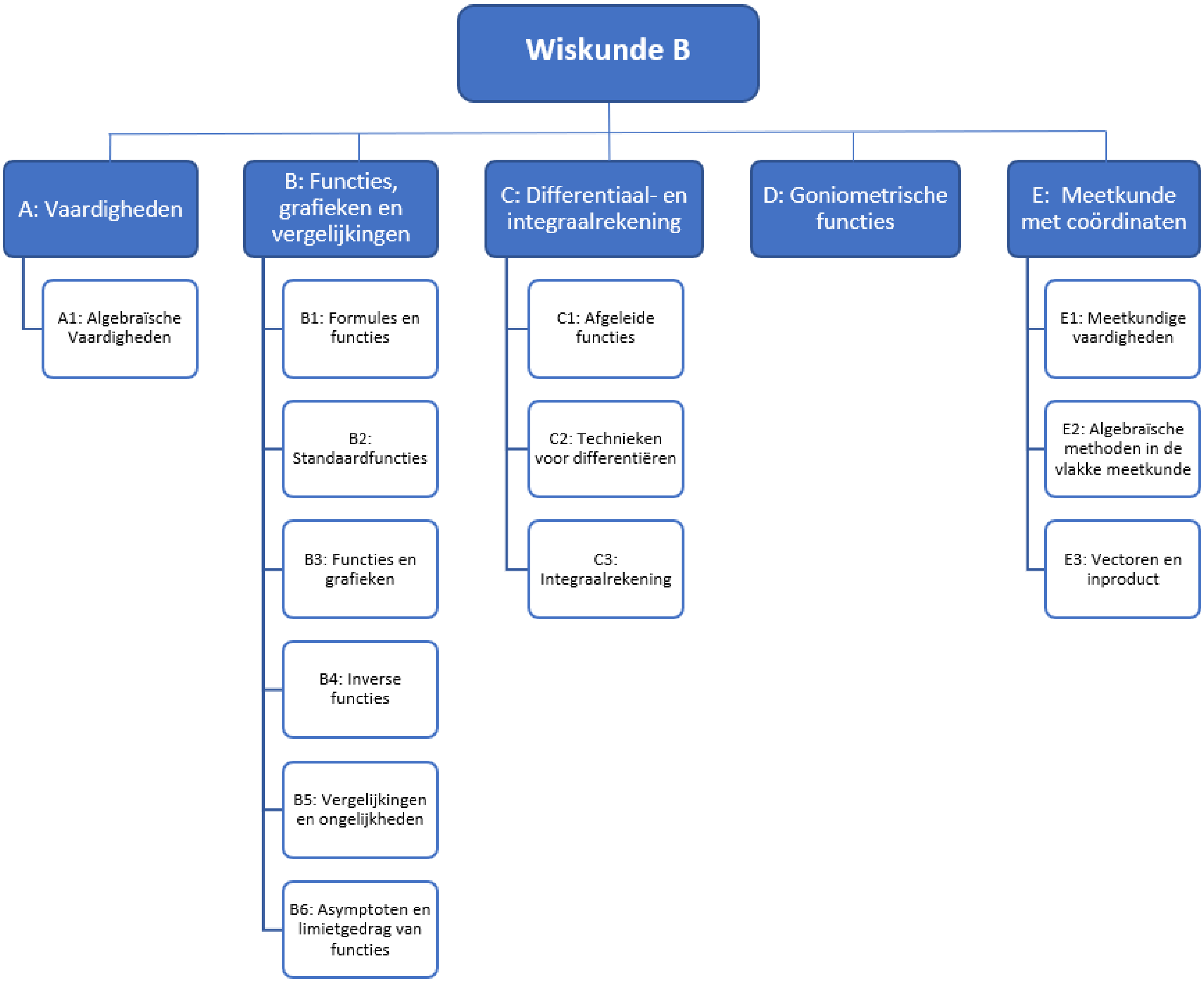
Tip 10
Oefenen, oefenen, oefenen… Oefen zoveel mogelijk oude examens!

Overzicht van het vak

Goed, laten we beginnen met het vak wiskunde B! Zoals gezegd neemt eXamengevat de domeinen als rode draad. Dit zijn de domeinen die je moet kennen voor zowel het schoolexamen (SE) als het centraal examen (CE):

Domein	Subdomein	in CE	moet in SE	mag in SE
A: Vaardigheden	A1: Algemene vaardigheden	X	X	
	A2: Profielspecifieke vaardigheden	X		X
	A3: Wiskundige vaardigheden	X		X
B: Functies, grafieken en vergelijkingen	B1: Formules en functies	X		X
	B2: Standaardfuncties	X		X
	B3: Functies en grafieken	X		X
	B4: Inverse functies	X		X
	B5: Vergelijkingen en ongelijkheden	X		X
	B6: Asymptoten en limietgedrag van functies	X		X
C: Differentiaal- en integraalrekening	C1: Afgeleide functies	X		X
	C2: Technieken voor differentiëren	X		X
	C3: Integraalrekening	X		X
D: Goniometrische functies	D1: Goniometrische functies	X		X
E: Meetkunde met coördinaten	E1: Meetkundige vaardigheden	X	X	
	E2: Algebraïsche methoden in de vlakke meetkunde	X		X
	E3: Vectoren en inproduct	X		X
	E4: Toepassingen (dit is geen specifieke examenstof)	*X*		*X*
F: Keuzeonderwerpen	F1: Keuzeonderwerpen		X	

In het onderstaande schema zie je precies welke domeinen je moet kennen voor je centraal examen:



Met andere woorden: als je al deze domeinen kent dan kun je niet verrast worden op je eindexamen. Dit is wat het is.

Wat mag je meenemen?

Ook niet onbelangrijk… Wat mag je precies meenemen naar het examen? In de onderstaande tabel hebben we op een rijtje gezet wat je allemaal mee mag nemen naar het examen van Wiskunde A:

Voor welk vak?	Hulpmiddel
Alle vakken	Schrijfmateriaal (inclusief millimeterpapier)
	Tekenpotlood
	Blauw en rood kleurpotlood
	Liniaal met millimeterverdeling
	Passer
	Geodriehoek
	Vlakgum
	Een niet-grafische rekenmachine
Alle schriftelijke examens	Woordenboek Nederlands
Handig om mee te nemen	Iets te eten
	Genoeg water
	Reservepen en -potloden
Wiskunde B	Een grafische rekenmachine

**De Grafische Rekenmachines (GR) die op het CE van 2019/2020 zijn toegestaan:*

Casio:
- fx-9860GII(SD) met examenstand: OS 2.07 en hoger;
- fx-CG20 met examenstand: OS 2.01 en hoger;

Hewlett Packard:
- HP Prime, mits in de examenstand de volgende instellingen zijn gerealiseerd:

- *De time-out is ingesteld op 4 uur.*
- *Het geheugen is gewist.*
- *De knipperende LED staat aan.*
- *Gebruikerstoepassingen zijn uitgeschakeld.*
- *CAS is uitgeschakeld.*
- *Opmerkingen en programma's zijn gewist en onbereikbaar gemaakt.*
- *Nieuwe opmerkingen en programma's aanmaken is geblokkeerd.*

Texas Instruments:
- TI-84 Plus T vanaf versie OS 5.1, de basisversie met LED lampje;
- TI-84 Plus CE-T vanaf versie OS 5.1.5;
- TI-Nspire CX (alleen de versie zonder CAS) vanaf versie OS 4.4.0.532.

N.B.1 Op machines die over CAS-functionaliteiten beschikken dient deze functionaliteit te worden geblokkeerd in de examenstand.

N.B.2 In machines met een SD-slot mag tijdens het CE geen SD-kaart zitten.

N.B.3 Oudere types, ook die eerder wel waren toegestaan, zijn NIET meer toegestaan.

HO, STOP! Begin eerst met de instaptoets!

We snappen dat je meteen aan de gang wilt, maar we raden je aan om in te loggen op je persoonlijke leeromgeving en te beginnen met de **instaptoets**!

De instaptoets bestaat uit 3-4 vragen per domein en is een soort **mini-eindexamen**. De instaptoets laat je zien welke domeinen je al goed beheerst, en de domeinen waarin je jezelf nog kan verbeteren. Superhandig, want dan weet je precies op welke domeinen je de focus moet leggen!

Ga naar onze website www.examengevat.nl > Mijn Account > Mijn Leeromgeving > het vak waarmee je wilt oefenen > Instaptoets.

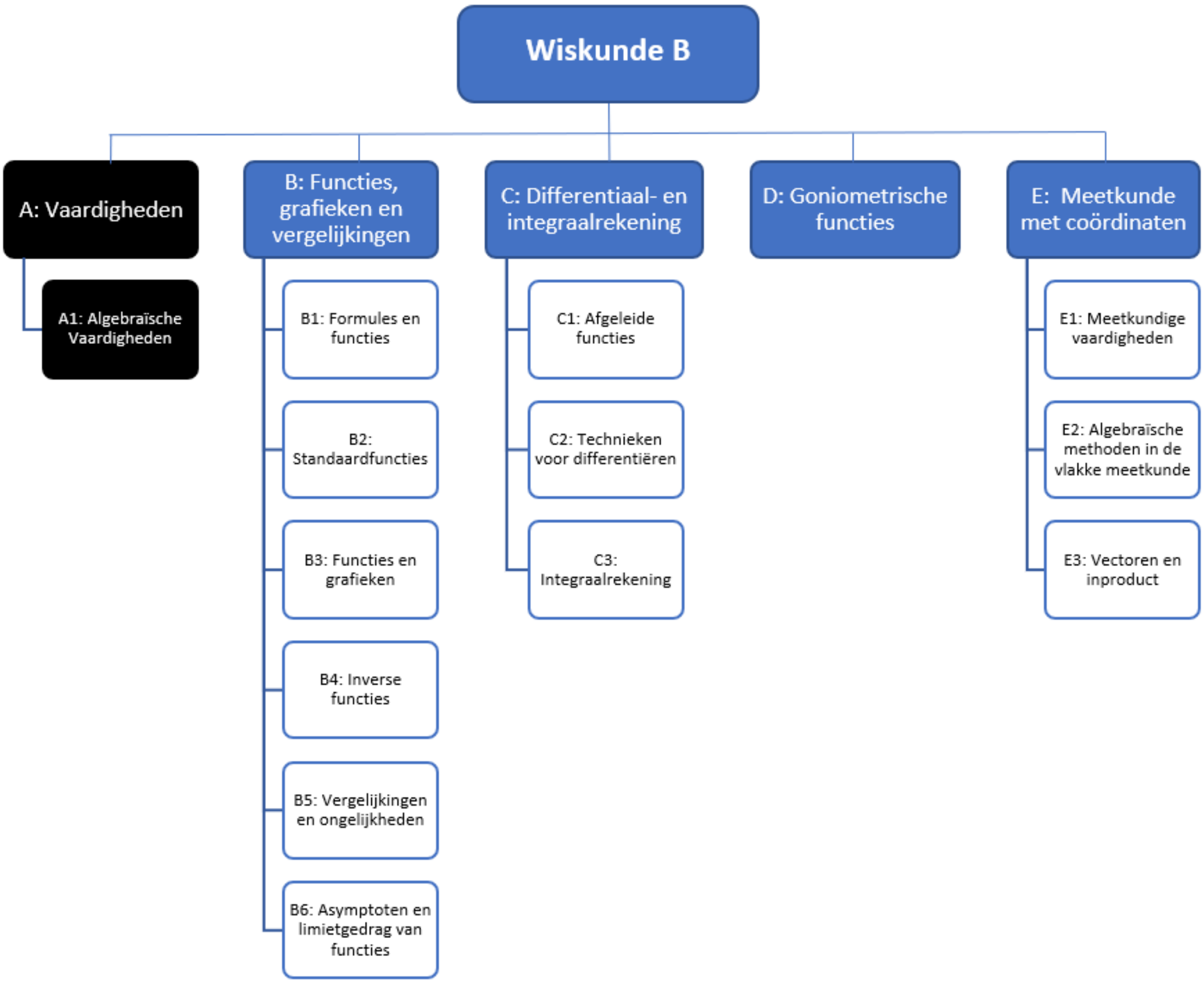
Wat nog makkelijker is… **Scan deze QR-code, die brengt je meteen naar de Instaptoets van Wiskunde B VWO (vergeet niet eerst in te loggen!):**

Veel succes met instaptoets en de rest van de eXamengevat bundel, we hopen dat het je helpt om te slagen en je de vlag binnenkort snel kan uithangen!

Het gehele eXamengevat team

Domein A1: Algemene vaardigheden

Vakoverzicht



Algebraïsche vaardigheden

We gaan nu toch echt beginnen! We beginnen met het eerste domein, namelijk het domein over de algemene vaardigheden. Dit zijn basisvaardigheden waarvan wordt verwacht dat je die goed beheerst. We gaan in dit hoofdstuk deze basisvaardigheden nog eens kort met je herhalen.

Vergelijkingen

Vergelijkingen zijn één van de belangrijkste onderwerpen van wiskunde die je goed moet kunnen begrijpen om zo uiteindelijk een som op te kunnen lossen. Er is een aantal standaardregels dat je kunt toepassen op allerlei vergelijkingen. Dit maakt het vervolgens supermakkelijk voor jou om alles uit te rekenen. Als je deze regels goed kent, gaat het helemaal goedkomen op het examen!

We gaan je eerst de rekenregels uitleggen. Hiermee weet je in welke volgorde je een som moet oplossen:

Rekenregels

	Volgorde	Tekens
1	Wat tussen haakjes staat	( )
2	Machten en wortels van links naar rechts	^{2} √
3	Vermenigvuldigingen en delingen van links naar rechts	* :
4	Optellingen en aftrekkingen van links naar rechts	+ −

Als je deze regels goed kent, gaat het helemaal goedkomen op het examen!

Voorbeeldopgave 1: Rekenregels

Los de volgende som op:

$$2 * (5 * 10 + 6) + 2 * 3^2 - \frac{5}{2}$$

Uitwerking

Gebruik de rekenregels. Als eerste moet je uitrekenen wat er tussen de haakjes staat. Daarvan moet je als eerste vermenigvuldigen en daarna pas optellen:

$$\mathbf{2 * (50 + 6) + 2 * 3^2 - \frac{5}{2}} =$$

$$2 * 56 + \mathbf{2 * 3^2 - \frac{5}{2}} =$$

Vervolgens is het tijd voor de machten en wortels van links naar rechts:

$$2 * 56 + \mathbf{2} * 9 - \mathbf{\frac{5}{2}}$$

Daarna gaan we vermenigvuldigingen en delingen van links naar rechts behandelen:

$$112 + 18 - 2{,}5$$

Gebruik vervolgens de volgende laatste regel: optellingen en aftrekkingen van links naar rechts:

$$112 + 18 - 2{,}5 = 127{,}5$$

In deze video worden de rekenregels voor je toegepast!

Video WisBH-A1-1

Algemene regels

Formule	oplossing
$\boldsymbol{\frac{A}{B} = C}$	$A = B * C$
$\boldsymbol{A * B = C}$	$A = \frac{C}{B}$
$\boldsymbol{\frac{A}{B} = \frac{C}{D}}$	$A * D = B * C$
$\boldsymbol{A * B = 0}$	$A = 0 \; of \; B = 0$
$\boldsymbol{A * B = A}$	$A = 0 \; of \; B = 1$
$\boldsymbol{A * B = A * C}$	$A = 0 \; of \; B = C$
$\boldsymbol{A^2 = B^2}$	$A = B \; of \; A = -B$
$\boldsymbol{A^2 = B}$	$A = \sqrt{B} \; of \; A = -\sqrt{B}$
$\boldsymbol{\sqrt{A}}$	$A = B^2$

Met deze bovenstaande formules kun je bijna elke vergelijking oplossen! Voordat we verder gaan, gaan we eerst even naar een voorbeeldopgave kijken. We beginnen rustig aan.

Voorbeeldopgave 1: Algemene regels

Zie de onderstaande vergelijking. Druk x uit in y met behulp van de bovenstaande regels.

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{5} = \frac{y^2}{10}}$$

Uitwerking

Gebruik eerst de regel:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$
$$A * D = B * C$$

Als we dit met onze formule doen, krijgen we hieruit:

$$\frac{x^2}{5} = \frac{y^2}{10}$$
$$\boldsymbol{10 * x^2 = 5 * y^2}$$

Zet vervolgens x apart (wanneer je deze wilt uitdrukken):

$$x^2 = \frac{5}{10} * y^2$$

Gebruik vervolgens de volgende algemene regel:

$$A^2 = B$$
$$A = \sqrt{B} \; of \; A = -\sqrt{B}$$

Met de formule komt er dan het volgende uit:

$$\boldsymbol{x = \sqrt{\frac{1}{2} * y^2} \; of \; x = -\sqrt{\frac{1}{2} * y^2}}$$

Ook dit kunnen we weer versimpeld opschrijven:

$$\boldsymbol{x = \sqrt{2 * \frac{1}{4} * y^2} \; of \; x = -\sqrt{2 * \frac{1}{4} * y^2}}$$

Vervolgens kunnen we $\frac{1}{4}$ uit de wortel halen:

$$x = \frac{1}{2} * \sqrt{\mathbf{2} * y^2} \; of \; x = -\frac{1}{2} * \sqrt{\mathbf{2} * y^2}$$

Ook kan y^2 uit de wortel gehaald worden, want de wortel heft het kwadraat van de $\boldsymbol{y}$ op. Dit ziet er als volgt uit:

$$\sqrt{y^2} = y$$

Voor de formule geldt dan:

$$x = \frac{1}{2} y * \sqrt{2} \; of \; x = -\frac{1}{2} * y\sqrt{2}$$

Hoppa, de kop is eraf! We duiker dieper in de wereld van de formules door formules om te schrijven, wat we ook wel substitueren noemen. Daar gaan we!

Variabelen vrijmaken

Vaak zitten er meerdere variabelen in één formule. Deze wil je soms op een andere manier schrijven. Zo wil je bijvoorbeeld uit de formule: $x = 2z + 3 - \frac{4}{y},\ y$ weten. Om y vrij te maken, kun je de volgende stappen gebruiken:

1. Zorg dat er geen breuken staan.
2. Zet alle variabelen die je wilt vrijmaken naar links en de rest naar rechts.
3. Haal de variabele die je wilt vrijmaken buiten haakjes.
4. Breng de rest naar rechts.

Dit toepassen op: $x = 2z + 3 - \frac{4}{y}$ geeft:

1. Zorg dat er geen breuken staan: $yx = y2z + 3y - 4$.
2. Zet alle variabelen die je wilt vrijmaken naar links en de rest naar rechts: $yx - y2z - 3y = -4$.
3. Haal de variabele die je wilt vrijmaken buiten haakjes: $y(x - 2z - 3) = -4$.
4. Breng de rest naar rechts: $y = -\frac{4}{x-2z-3}$.

Substitueren

Soms heb je meerdere vergelijkingen met meerdere variabelen. Voor het examen is het handig dat je deze formules omschrijft. Dit kun je het beste doen door middel van **substitueren**. Substitutie in de wiskunde betekent het vervangen van een uitdrukking door een andere uitdrukking, meestal in een grotere uitdrukking of in een vergelijking. We gaan je nu een voorbeeld laten zien, zodat je begrijpt hoe substitueren werkt! Of kijk eerst nog even naar de video hieronder voor extra uitleg.

Voorbeeldopgave 2: Substitueren

Los onderstaand stelselvergelijking op:

$$\boldsymbol{x = 10y + 12}$$
$$\boldsymbol{6y = 3x}$$

Uitwerking

Om de waarde van x te bepalen wil je eerst y volledig uit de formules verwijderen. Dit kun je doen door de onderste formule in te vullen in de bovenste formule. Eerst gaan we y uit de tweede formule vrijmaken:

$$\boldsymbol{6y = 3x}$$
$$\boldsymbol{y = \frac{3x}{6}}$$
$$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x}$$

Nu we y weten, kunnen we deze invullen in de eerste vergelijking:

$$\boldsymbol{x = 10 * \frac{1}{2}x + 12}$$

Dit gaan we nu verder uitwerken om zo $\boldsymbol{x}$ te berekenen:

$$\boldsymbol{x = 5x + 12}$$

Vervolgens zetten we alles met $\boldsymbol{x}$ aan één kant:

$$\boldsymbol{x - 5x = 12}$$

$$\boldsymbol{-4x = 12}$$

Dit invullen in de vergelijking geeft:

$$\boldsymbol{x = \frac{12}{-4} = -3}$$

Voorbeeldopgave 3: Substitueren

Gegeven zijn de volgende twee formules. Druk x uit in $\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{x = 7z + 12}$$
$$\boldsymbol{z = 3y}$$

Uitwerking

Je gaat x uitdrukken in $\boldsymbol{y}$. Het is dus de bedoeling om $\boldsymbol{z}$ te elimineren. Dit kun je doen door de tweede formule in te vullen in de eerste formule:

$$\boldsymbol{x = 7 * 3y + 12}$$

$$\boldsymbol{x = 21y + 12}$$

Zo simpel is het! Denk gewoon goed van tevoren na welke variabelen je wilt houden en welke weg kunnen! In dit geval hebben ze het in de vraag over x en y. Al staan er nog 20 andere variabelen in de formules, het gaat om deze twee variabelen. De rest mag worden weggewerkt.

Haakjes

In wiskunde worden vaak **haakjes** gebruikt om een formule er duidelijker uit te laten zien. Deze moet je ook weer kunnen wegwerken! Bij **één vergelijking tussen haakjes** vermenigvuldig je het getal voor de haakjes met *alle* getallen binnen de haakjes:

$$6(5+x) = 6*5+6*x$$

In letters:

$$A(B+C) = A*B+A*C$$

Bij **twee vergelijkingen tussen haakjes** vermenigvuldig je *elke term* met elkaar:

$$(6-x)(5+x) = 6*5+6*x-x*5-x*x$$

Als je deze formule uitwerkt, krijg je:

$$30+6*x-5*x-x^2 = 30+x-x^2$$

In letters kunnen we dit schrijven als:

$$(A+B)(C+D) = A*C+A*D+B*C+B*D$$

Er zijn ook een paar standaardformules die altijd hetzelfde zijn. Deze formules heten **merkwaardige producten**. Zo geldt voor elke A en B dat:

$$(A+B)^2 = A^2+2*AB+B^2$$
$$(A-B)^2 = A^2-2*AB+B^2$$
$$(A+B)*(A-B) = A^2-B^2$$

Video WisBV-A1-2

Kijk hier nog eens een video over haakjes, soms snap je het nóg beter als iemand het voordoet!

Voorbeeldopgave 4: Haakjes

Vereenvoudig deze formule zo ver mogelijk:

$$\mathbf{3(3x+5)(2x+3)}$$

Uitwerking

Gebruik eerst de methode zoals hiervoor is uitgelegd om de haakjes weg te werken:

$$\mathbf{3(3x+5)(2x+3)}$$

$$\mathbf{3(6x^2+9x+10x+15)}$$

Nu kun je alles binnen de haakjes samenvoegen en vervolgens het getal voor de haakjes vermenigvuldigen met alles wat in de haakjes staat:

$$\mathbf{3(6x^2+19x+15)} =$$
$$\mathbf{18x^2+57x+45}$$

Voorbeeldopgave 5: Merkwaardige producten

Vereenvoudig deze formule zo ver mogelijk:

$$(\mathbf{3x + 5})(\mathbf{3x - 5})$$

Uitwerking

Voor deze formule kun je de regel van merkwaardige producten gebruiken:

$$(A + B) * (A - B) = A^2 - B^2$$

Met $A = 3x$ en $B = 5$. Invullen geeft vervolgens dus:

$$(\mathbf{3x + 5})(\mathbf{3x - 5}) = (\mathbf{3x})^{\mathbf{2}} - \mathbf{5}^{\mathbf{2}} = \mathbf{9x^2 - 25}$$

Breuken

Een breuk ontstaat als je de **teller** (het bovenste getal) deelt door de **noemer** (het onderste getal) in de vorm $\frac{a}{b}$. Hierin is a de teller en b de noemer. De noemer mag nooit 0 zijn, want je kunt iets niet delen door nul: *Delen door nul, is flauwekul!*

Breuken vereenvoudigen

Je doet er slim aan om een breuk zo veel mogelijk te vereenvoudigen voordat je er mee gaat rekenen. Je vereenvoudigt een breuk door de teller en noemer door hetzelfde getal te delen. Zo is bijvoorbeeld:

$$\frac{3}{30} = \frac{3 * 1}{3 * 10} = \frac{1}{10}$$

Hier zijn de teller en noemer uiteindelijk beide gedeeld door 3. In dit geval kun je dus de 3 van de noemer en de teller wegdelen. Je kunt ook de hele cijfers naar buiten halen. Zo is bijvoorbeeld:

$$\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

Breuken optellen en aftrekken

Om breuken bij elkaar op te tellen of van elkaar af te trekken moet je er eerst voor zorgen dat beide breuken dezelfde noemer hebben. Alleen dan kun je de bewerking optellen en/of aftrekken direct uitvoeren:

<u>Getallen</u> $\frac{3}{11} + \frac{1}{11} = \frac{4}{11}$

<u>Letters</u> $\frac{A}{B} + \frac{C}{B} = \frac{A+C}{B}$

Hetzelfde geldt voor het aftrekken van breuken:

<u>Getallen</u> $\frac{3}{11} - \frac{1}{11} = \frac{2}{11}$

<u>Letters</u> $\frac{A}{B} - \frac{C}{B} = \frac{A-C}{B}$

Dit heten ook wel **gelijknamige breuken.** Als de breuken niet dezelfde noemer hebben, moet je de hele breuk eerst vermenigvuldigen met een getal/letter, zodat beide noemers hetzelfde zijn:

<u>Getallen</u> $\frac{3}{6} + \frac{4}{9} = \frac{3*9}{6*9} + \frac{4*6}{9*6} = \frac{27}{54} + \frac{24}{54}$

<u>Letters</u> $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A*D}{B*D} + \frac{C*B}{D*B}$

Na deze stap is het wel mogelijk om de breuken bij elkaar op te tellen of af te trekken:

<u>Getallen</u> $\frac{27}{54} + \frac{24}{54} = \frac{51}{54}$

<u>Letters</u> $\frac{A*D}{B*D} + \frac{C*B}{D*B} = \frac{A*D+C*B}{D*B}$

Om de breuk vervolgens weer te vereenvoudigen:

<u>Getallen</u> $\frac{51}{54} = \frac{3*17}{3*18} = \frac{17}{18}$

Tip: Kijk nog eens naar de video, dan wordt het nog eens voorgedaan!

Video WisBV-A1-3

Breuken vermenigvuldigen

Nu we al weten hoe we de breuken moeten vereenvoudigen en optellen/aftrekken, gaan we door naar het laatste stapje: breuken vermenigvuldigen en delen. Dit is heel simpel, je moet gewoon onthouden dat de teller met de teller wordt vermenigvuldigd en de noemer met de noemer wordt vermenigvuldigd:

<u>Getallen</u> $\frac{5}{4} * \frac{3}{6} = \frac{5*3}{4*6} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$

<u>Letters</u> $\frac{A}{B} * \frac{C}{D} = \frac{A*C}{B*D}$

Misschien helpt het je om hier ook nog een video van te kijken.

Breuken delen

Voor **delen** geldt het omgekeerde: delen is hetzelfde als het vermenigvuldigen met het omgekeerde van de breuk. In jip-en-janneketaal, de noemer van de breuk "klapt" in feite om. De teller van de breuk die je moet oplossen vermenigvuldig je met de "omgeklapte" noemer.

Als je dat gedaan hebt, vermenigvuldig je de breuken met $\frac{A}{B} * \frac{C}{D} = \frac{A*C}{B*D}$, zoals we hierboven hebben gezien. Dus:

<u>Getallen</u> $\frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{6}} = \frac{5}{4} * \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{3}} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}$

<u>Letters</u> $\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} * \frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{C}} = \frac{A*D}{B*C}$

Breuken vermenigvuldigen/delen met een heel getal

Als je een breuk vermenigvuldigt of deelt door een heel getal is het het makkelijkste deze ook in breukvorm te zetten. Zo is $4 = \frac{4}{1}$. Laten we eens kijken naar hetzelfde cijfervoorbeeld, dat zowel wordt vermenigvuldigd als gedeeld.

Een breuk vermenigvuldigen met 4:

<u>Getallen</u> $\frac{5}{6} * 4 = \frac{5}{6} * \frac{4}{1} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$

<u>Letters</u> $\frac{A}{B} * C = \frac{A}{B} * \frac{C}{1} = \frac{A*C}{B}$

Een breuk delen door 4:

<u>Getallen</u> $\frac{\frac{5}{6}}{4} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{4}{1}} = \frac{5}{6} * \frac{1}{4} = \frac{5}{24}$

<u>Letters</u> $\frac{\frac{A}{B}}{C} = \frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{1}} = \frac{A}{B} * \frac{1}{C} = \frac{A*1}{B*C}$

Tip: we hebben alle belangrijkste formules op het **formuleblad** gezet. Kijk maar eens achter in dit boekje! We raden je aan om deze belangrijkste formules uit je hoofd te leren. Dat is geen leuk werk, maar je komt deze situaties zo vaak tegen dat het je leven wel een stuk makkelijker maakt.

Stel jezelf de vraag bij een breuksom "***Wat is het verband tussen deze twee breuken***?". Wordt er opgeteld, afgetrokken, vermenigvuldigd of gedeeld? Als je dit weet, graaf je de formule op die op het formuleblad staat en vult deze in. Het is de meest systematische manier om dit soort breuksommetjes aan te pakken.

Vergelijkingen van breuken oplossen

Zo, na dit stuk theorie gaan we eens kijken of het je lukt om een som te maken. Los op:

$$8 = \frac{6}{1} - \frac{x + \frac{2x}{5}}{3 + x}$$

Het is goed mogelijk dat dit het moment is dat je de theorie gelezen hebt en deze snapt, maar je toch even niet weet hoe je deze som moet aanpakken. Snappen we. Stel jezelf de vraag "***Wat is nou het verband tussen deze twee breuken***?". Je ziet dat je moet **aftrekken**, er staat een minteken tussen de twee breuken. Niet verder denken, pak de standaardformule van je formuleblad:

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A * D}{B * D} + \frac{C * B}{D * B} = \frac{\boldsymbol{A * D + C * B}}{\boldsymbol{D * B}}$$

We gaan nu deze formule invullen:

$$8 = \frac{6 * (3 + x)}{3 + x} - \frac{x + \frac{2x}{5}}{3 + x} = \frac{\boldsymbol{6 * (3 + x) - \left(x + \frac{2x}{5}\right)}}{\boldsymbol{3 + x}} =$$

$$8 = \frac{18 + 6x - x - \frac{2x}{5}}{3 + x} =$$

$$8 = \frac{18 + 5x - \frac{2x}{5}}{3 + x}$$

We zijn er nu nog niet, we moeten immers die x eruit zien te halen! Vervolgens kun je beide kanten vermenigvuldigen met de noemer om de vergelijking simpeler te maken:

$$8 * (3 + x) = 18 + 5x - \frac{2x}{5}$$

Dit kun je versimpelen door de haakjes uit te werken en alles op te tellen:

$$24 + 8x = 18 + (5 - \frac{2}{5})x$$

$$24 + 8x = 18 + 4\frac{3}{5}x$$

Zet nu alle x aan de ene kant en de getallen aan de andere kant:

$$8x - 4\frac{3}{5}x = 18 - 24$$

Geeft:

$$3\frac{2}{5}x = -6$$

Dus, we delen nu beide kanten door $3\frac{2}{5}$:

$$x = -\frac{6}{3\frac{2}{5}} = -\frac{6}{\frac{17}{5}} = \cdots$$

Loop je vast? Stel jezelf weer die vraag "***Wat is het verband tussen deze twee breuken***?". Je ziet dat er gedeeld wordt. Je zoekt de bijbehorende formule van je formuleblad op:

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}} * \frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{C}} = \frac{A * D}{B * C}$$

6 is hier een geheel getal, dus deze moet je omschrijven naar $\frac{6}{1}$:

$$x = -\frac{\frac{6}{1}}{\frac{17}{5}} = -\mathbf{\frac{6}{1}} * \mathbf{\frac{5}{17}} = \frac{6 * 5}{1 * 17} = -\frac{30}{17}$$

$$x = -\frac{30}{17}$$

Voorbeeldopgave 6: Breuken vereenvoudigen

Vereenvoudig deze breuk zo ver mogelijk:

$$\frac{24}{72}$$

Uitwerking

Je maakt de teller en noemer zo klein mogelijk. Je moet hiervoor op zoek gaan naar het grootste getal waardoor je ze beide kunt delen. De teller (24) is deelbaar door 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. De noemer (72) is deelbaar door 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72. Het grootste getal waar zowel de noemer en teller door gedeeld kan worden is dus 24:

$$\frac{24}{72} = \frac{1 * 24}{3 * 24} = \frac{1}{3}$$

Voorbeeldopgave 7: Breuken optellen/aftrekken

Schrijf als een breuk:

$$A + \frac{B}{C} - \frac{C}{B}$$

Uitwerking

Voor optellen/aftrekken moet de noemer van elke breuk dezelfde waarde hebben. Je ziet in deze formule in feite drie breuken:

1. A, welke een geheel getal is en dus in feite $\frac{A}{1}$
2. $+\frac{B}{C}$
3. $-\frac{C}{B}$

We gaan voor elk van deze drie breuken de noemer gelijk maken. We gebruiken daarvoor de formule voor het optellen van breuken van je formuleblad:

$$\frac{A*C*B}{1*C*B}+\frac{B*1*B}{1*C*B}-\frac{C*1*C}{B*C*1}$$

Teller Breuk 1: A vermenigvuldigd met noemers C (breuk 2) en B (breuk 3)
Noemer Breuk 1: 1 vermenigvuldigd met noemers C (breuk 2) en B (breuk 3)

Teller Breuk 2: B vermenigvuldigd met noemers 1 (breuk 1) en B (breuk 3)
Noemer Breuk 2: C vermenigvuldigd met noemers 1 (breuk 1) en B (breuk 3)

Teller Breuk 3: C vermenigvuldigd met noemers 1 (breuk 1) en C (breuk 2)
Noemer Breuk 3: B vermenigvuldigd met noemers 1 (breuk 1) en C (breuk)

Oftewel:

$$\frac{A*C*B}{C*B}+\frac{B*B}{C*B}-\frac{C*C}{B*C}$$

Nu alle noemers hetzelfde zijn, kun je de breuken bij elkaar optellen/aftrekken:

$$\frac{A*C*B}{C*B}+\frac{B*B}{C*B}-\frac{C*C}{B*C}=\frac{A*C*B+B^2+C^2}{B*C}$$

Deze som was best pittig, vond je niet? Als je deze onder de knie hebt, dan mag je trots zijn op jezelf. Je bent dan goed bezig voor je examen!

Voorbeeldopgave 8: Breuken vermenigvuldigen/delen

Vereenvoudig deze breuk zo ver mogelijk:

$$\frac{\frac{5}{6}}{7}*\frac{2}{3}$$

Uitwerking

Als eerste is het verstandig om de 7 om te schrijven in de breukvorm $7/1$:

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{1}}*\frac{2}{3}$$

Bij delen geldt de regel dat dit hetzelfde is als vermenigvuldigen met het omgekeerde van de onderste breuk. Je “klapt” de noemer om:

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{1}}=\frac{5}{6}*\frac{1}{7}$$

Dit zorgt voor een totale formule van:

$$\frac{5}{6}*\frac{1}{7}*\frac{2}{3}=\frac{5*1*2}{6*7*3}=\frac{10}{126}=\frac{5}{63}$$

Voorbeeldopgave 9: Vergelijkingen van breuken

Los de vergelijking op en bepaal x:

$$\frac{4x-4}{5x}+1=-3$$

Uitwerking

Zorg eerst dat er één vergelijking staat door de 1 naar de andere kant te brengen:

$$\frac{4x-4}{5x}=-4$$

Vermenigvuldig vervolgens beide kanten met de noemer ($5x$):

$$\frac{4x-4}{5x}*5x=-4*5x$$

Geeft:

$$4x-4=-20x$$

Schrijf nu alle x naar één kant en alle getallen zonder x naar de andere kant:

$$4x+20x=4$$

Vereenvoudig:

$$24x=4$$

Dit geeft uiteindelijk:

$$x=\frac{4}{24}=\frac{1*4}{6*4}=\frac{1}{6}$$

Wortels

We zijn alweer bij de volgende vaardigheid beland. Lekker bezig! Dit stuk gaat over het vermenigvuldigen, delen, optellen en aftrekken van **wortels**.

Een belangrijk punt bij het werken met wortels is dat je niet een wortel mag nemen van een negatief getal! Een wortel is het omgekeerde van een kwadraat, waarbij dus het volgende geldt:

Als $\boldsymbol{a = b^2}$ **dan** $\boldsymbol{b = \sqrt{a}\ of\ b = -\sqrt{a}}$ **.**

Wortels optellen

Je kunt wortels alleen maar optellen/aftrekken als hetzelfde getal onder de wortel staat:

$$6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

Let op, dit kan dus niet:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$$

$$a + b \neq \sqrt{a^2 + b^2}$$

De video kan je helpen het nog beter te begrijpen!

Video WisBV-A1-5

Wortels vermenigvuldigen

Je kunt wortels wel met elkaar vermenigvuldigen/delen om ze samen te voegen:

$$\sqrt{a} * \sqrt{b} = \sqrt{a * b}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Hierbij geldt weer dat zowel a als b **positief** moeten zijn!

Kijk nog eens de video voor wat extra uitleg.

Video WisBV-A1-6

Wortels samenvoegen

Door wat je net hebt geleerd gaat het je ook lukken om wortels samen te voegen. Om wortels op te tellen is het dus noodzakelijk om hetzelfde getal onder de wortel te krijgen. Dit kun je doen door hetgene wat onder het wortelteken staat, gelijk te maken. We gebruiken daar de regels voor die we net hebben gezien:

$$6\sqrt{12} + 2\sqrt{3} =$$

$$6\sqrt{4 * 3} + 2\sqrt{3} =$$

$$6 * \sqrt{4} * \sqrt{3} + 2\sqrt{3}$$

Deze formule kun je verder uitwerken:

$$6 * 2 * \sqrt{3} + 2\sqrt{3} =$$

$$12\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$$

Uiteindelijk kun je de wortels nu wel optellen omdat er onder beide wortels hetzelfde getal staat:

$$12\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 14\sqrt{3}$$

Wortels kwadrateren

Om sommige vergelijkingen op te lossen is het nodig om wortels te kwadrateren. Dit doe je door eerst de wortel aan de ene kant van de vergelijking te zetten en de rest van de formule <u>aan de andere kant</u>:

$$\sqrt{5 + x} + 25 = 30$$
$$\sqrt{5 + x} = 5$$

Nu is het mogelijk om beide kanten van de formule te kwadrateren. De algemene regel van twee kwadratische vergelijkingen:

$$A^2 = B^2 \rightarrow A = B \; of \; A = -B$$

Als je dit toepast op de voorgaande vergelijking krijg je:

$$\left(\sqrt{5 + x}\right)^2 = 5^2$$

$$5 + x = 25 \; of \; 5 + x = -25$$

Onder de wortel mag geen negatief getal zijn, dus $5 + x = -25$ kan niet. Vervolgens kun je x gemakkelijk uitrekenen:

$$x = 20$$

Deze invullen in de vergelijking ter controle geeft:

$$x = 20 \rightarrow \sqrt{5 + 20} + 25 = 30 \qquad KLOPT$$

Dus $x = 20$ voldoet.

Voorbeeldopgave 10: Wortels

Los de volgende vergelijking op:

$$\sqrt{2x+3} = x$$

Uitwerking

Begin met het kwadrateren van de hele vergelijking:

$$2x + 3 = x^2$$

Schrijf nu alles naar één kant:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Nu gaan we ontbinden in factoren, oftewel de x tussen haakjes zetten. Even een opfrisser hoe dit moet! We gebruiken hiervoor de **product-som-methode**. We gaan op zoek naar twee waarden die als je ze bij elkaar optelt -2 zijn (*som*) en als je ze vermenigvuldigt -3 zijn (*product*). Het is altijd het tweede stukje in een kwadratische vergelijking (in ons voorbeeld $2x$) dat de som is en altijd het derde stukje (in ons voorbeeld -3) dat het product is.

Het zou dus logischer zijn geweest om het de ***som-product-methode*** te noemen, dan staan de twee aspecten in dezelfde volgorde zoals je ze moet toepassen in zo'n kwadratische formule. Het mag helaas niet zo zijn, maar neem het mee als je hier nog wat moeite mee hebt.

Overigens is de som-product-methode niet de enige manier om dit op te lossen. Soms zijn er gewoon geen getallen waarmee je de som en het product van de termen in de formule kunt maken. Je gebruikt dan de **abc-formule**, die werkt altijd! Hier kijken we later in dit hoofdstuk nog even naar.

Dus, we gaan op zoek naar twee waarden die opgeteld -2 zijn en als je ze met elkaar vermenigvuldigt -3 is. Even wat hoofdrekenen geeft $+1$ en -3:

$$(x+1)(x-3) = 0$$

Dus:

$$x = -1 \; of \; x = 3$$

De wortel moet positief zijn, dus $\sqrt{2x+3} \geq 0$. Hiervoor moet het getal dat in de wortel staat dus ook groter zijn dan 0:

$$2x + 3 \geq 0$$

Voor $x = -1$ is het getal onder de wortel:

$2 * -1 + 3 = 1$ $\qquad$ $POSITIEF$

Voor $x = 3$ is het getal onder de wortel:

$2 * 3 + 3 = 9$ $\qquad$ $POSITIEF$

Dus beide oplossingen zijn goedgekeurd.

Machten

Van het begrip **machten** heb je vast wel eens eerder gehoord. Machten maken het makkelijker om formules korter en duidelijker te schrijven. Zo kun je bijvoorbeeld $8 * 8 * 8 * 8$ ook schrijven als 8^4. Hierin is de 8 het **grondtal** en de 4 de **exponent.** De macht ^{2} is de meest bekende macht. Dit kun je ook als ***kwadraat*** uitspreken.

Als je twee machten met hetzelfde grondtal aan elkaar gelijkstelt kan je het grondtal wegstrepen:

$$4^2 = 4^x$$
$$2 = x$$

Rekenregels

Er is een aantal regels dat je kunt gebruiken als je wilt werken met machten:

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^p * a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{p*q}$$

$$(a * b)^p = a^p * b^p$$

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \text{ waar } a \geq 0$$

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} \text{ waar } a \geq 0$$

Tip: Ook hier geldt weer, ***leer deze regels uit je hoofd***. Schrijf ze een aantal keer over in je schrift, zodat je ze herinnert. Leuk is anders, maar het is enorm handig als je deze regels paraat hebt. Kijk maar naar de voorbeeldopgaven die zo volgen. Die kun je vrij makkelijk oplossen als je de rekenregels uit je hoofd kent.

Wij hebben je alvast geholpen door alle rekenregels in het **formuleblad** onder elkaar te zetten!

De rekenregels worden nog eens voor je uitgelegd in de video hiernaast.

Video WisBV-A1-7

e macht

Het getal e is het grondtal voor **een exponentiële functie e^x**. Dit getal is een bijzonder getal waar je later meer van zal leren bij differentiëren en integreren! Verder gelden hier dezelfde rekenregels voor als bij gewone machten.

Voorbeeldopgave 11: Machten

Schrijf de volgende uitdrukkingen als één macht:

$$\frac{x^5 * x^6}{x^7}$$

Uitwerking

We gebruiken de bovenstaande rekenregels om dit op te lossen. In dit geval kunnen we het beste eerst deze toepassen:

$$a^p * a^q = a^{p+q}$$

Dan krijgen we namelijk:

$$\frac{x^5 * x^6}{x^7} = \frac{x^{5+6}}{x^7} = \frac{x^{11}}{x^7}$$

Vervolgens kunnen we de rekenregel die gebruikt wordt met delen toepassen:

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

Dit geeft in ons geval:

$$\frac{x^{11}}{x^7} = x^{11-7} = x^4$$

Voorbeeldopgave 12: Machten

Schrijf de volgende uitdrukkingen als één macht:

$$\frac{(x^5)^2}{x^0}$$

Uitwerking

We gebruiken de bovenstaande rekenregels om dit op te lossen. In dit geval kunnen we eerst deze regel toepassen:

$$(a^p)^q = a^{p*q}$$

Dit zorgt dat onze vergelijking:

$$\frac{(x^5)^2}{x^0} = \frac{x^{10}}{x^0}$$

Vervolgens gebruiken we nog een rekenregel om x^0 op te lossen:

$$a^0 = 1$$

Dit doen we nu ook bij onze vergelijking!

$$\frac{(x^5)^2}{x^0} = \frac{x^{10}}{x^0} = \frac{x^{10}}{1} = x^{10}$$

Logaritmen

In wiskunde is een **logaritme** de inverse van een exponentiële functie. Zo, ben je er nog? Dat betekent dat de logaritme van een gegeven getal b de exponent is waaraan een ander vast getal, het grondtal a, moet worden verheven om dat getal b te produceren:

$$a^c = b \quad \rightarrow \quad {}^{a}\log(b) = c$$

Klinkt nog wat ingewikkeld? We kijken even naar een voorbeeld. Bij bijvoorbeeld de vergelijking $2^x = 8$ krijg je de volgende logaritme als je x wilt berekenen:

$$2^x = 8 \quad \rightarrow \quad {}^{2}\log(8) = 3$$

Je kunt zo'n log-functie als volgt lezen: "*Welke macht moet ik boven g (het grondtal) zetten om b te krijgen*?".

Soms komt een log-functie mooi uit, zoals hierboven. Je kunt hem dan met wat hoofdrekenen prima zelf uitrekenen. Dit is natuurlijk niet altijd zo. Je gebruikt dan onderstaande formule en typt die in op de rekenmachine:

$${}^{g}\log(b) = \frac{log(b)}{log(g)}$$

Video WisBV-A1-8

We controleren meteen het voorbeeld van zojuist:

$${}^{2}\log(8) = \frac{log(8)}{log(2)} = 3$$

In deze video wordt het concept Logaritme nog eens uitgelegd met wat voorbeelden.

Rekenregels

Er is een aantal regels van toepassing als je wilt werken met logaritmen. Leer ook deze uit je hoofd:

Formule	Oplossing
$\boldsymbol{{}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b)}$	${}^{g}\mathrm{Log}(ab)$
$\boldsymbol{{}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b)}$	${}^{g}\mathrm{Log}(\frac{a}{b})$
$\boldsymbol{n * {}^{g}\log(a)}$	${}^{g}\mathrm{Log}(a^n)$
$\boldsymbol{{}^{g}\log(a)}$	$\frac{log(a)}{log(g)}$

Bij al deze regels geldt dat $g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ b > 0.$

Zoals je kunt zien, is er soms ook een $log(a)$ in plaats van ${}^{g}\log(a)$. Dan heb je te maken met de standaardlogaritme, ${}^{10}\log(1)$:

$${}^{10}\log(a) = \log(a)$$

Video WisBV-A1-9

Scan de QR-code om op je gemak nog eens de rekenregels terug te kijken.

Een logaritme van het grondtal e wordt een **natuurlijk logaritme** genoemd en wordt aangegeven met ln. Mocht je de link nog nooit gelegd hebben, ln is een afkorting voor *Logaritmus Naturalis*. Dit betekent dus dat ${}^{e}\log(b)$ hetzelfde is als $\ln(b)$.

$$b = e^x \rightarrow$$

$${}^{e}\log(b) \rightarrow$$

$$x = \ln(b)$$

Je kunt zo'n ln-functie als volgt lezen: "*Welke macht moet ik boven e (het grondtal) zetten om b te krijgen*?".

Voorbeeldopgave 13: Logaritmen

Vereenvoudig de volgende uitdrukking:

$$\log(5^3) + \log(\frac{1}{5})$$

Uitwerking

Kijk weer goed naar de rekenregels en welke het handigst is om te gebruiken. Wij zijn begonnen met deze:

$$n * {}^{g}\log(a) = {}^{g}\log(a^n)$$

Als we deze gebruiken in onze opgave dan krijgen we dat het eerste deel wordt:

$$\log(5^3) = 3 * \log(5)$$

En het tweede deel wordt:

$$\log(\frac{1}{5}) = \log(5^{-1}) = -1 * \log(5)$$

Dit invullen in de gehele formule geeft:

$$3 * \log(5) - 1 * \log(5) = 2 * \log(5)$$

Een andere manier om deze vergelijking op te lossen is met de rekenregel over optellen:

$$\log_g(a) + \log_g(b) = \log_g(ab)$$

In dit geval krijgen we dan:

$$\log(5^3) + \log(\frac{1}{5}) = \log(5^3 * \frac{1}{5}) = \log(25)$$

Dit heeft hetzelfde antwoord, want:

$$\log(25) = \log(5^2) = 2 * \log(5)$$

Algoritmen

Een **algoritme** is eigenlijk een standaardoplossing van een probleem, een soort stappenplan om een probleem stap voor stap op te lossen. Dit is een oplossingsmethode die ervoor zorgt dat je zeker tot het goede antwoord komt. Voor het eindexamen is het handig om de volgende algoritmen te kennen:

Eerstegraadsvergelijkingen

Een **eerstegraadsvergelijking** is een uitdrukking van de vorm:

$$\boldsymbol{ax + b = c}$$

In deze formule zijn a en b bekende getallen en $a \neq 0$. Om x te berekenen moet je de vergelijking oplossen. Deze kun je eenvoudig oplossen:

$$ax + b = c$$

$$ax = c - b$$

$$\boldsymbol{x = \frac{c - b}{a}}$$

Tweedegraadsvergelijkingen

Een **tweedegraadsvergelijking of kwadratische vergelijking** heeft de volgende vorm:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

We hadden een kwadratische vergelijking al eerder gezien in dit hoofdstuk. We gebruikten toen de ***som-product-methode***, weet je nog? We zeiden toen al dat deze som-product-methode niet altijd werkt. De oplossing van een tweedegraadsvergelijking kan altijd worden berekend met de **abc-formule**:

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Hierbij is het gedeelte onder de wortel de discriminant D:

$$D = b^2 - 4ac$$

Als vuistregel wordt gesteld:

$D = b^2 - 4ac > 0$	De vergelijking heeft twee oplossingen.
$D = b^2 - 4ac = 0$	De vergelijking heeft één oplossing.
$D = b^2 - 4ac < 0$	De vergelijking heeft geen (reële) oplossingen.

Andere algoritmen

$\boldsymbol{x^n = c \rightarrow x = c^{\frac{1}{n}}}$	Als n oneven is.
$\boldsymbol{x^n = c \rightarrow x = c^{\frac{1}{n}}\ of\ x^n = c \rightarrow x = -c^{\frac{1}{n}}}$	Als n even is.

$\boldsymbol{|x| = c \rightarrow x = c\ of\ x = -c}$

Voorbeeldopgave 14: Algoritmen

Los de volgende vergelijking op:

$$18x^2 + 50 = 30x$$

Uitwerking

Herleid de vergelijking eerst tot de vorm:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Waarbij $a > 0$, dan krijg je:

$$18x^2 - 30x + 50 = 0$$

Het is makkelijker om de vergelijking nog meer te vereenvoudigen, zodat je kleinere getallen krijgt. In dit geval kun je de hele vergelijking door 2 delen:

$$9x^2 - 15x + 25 = 0$$

Schrijf nu de waardes op van $a, b\ en\ c$ die je nodig hebt voor de abc-formule. Dan krijg je:

$$a = 9$$

$$b = -15$$

$$c = 25$$

Nu kun je de waarde van de discriminant D berekenen!

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-15)^2 - 4 * 9 * 25$$

$$D = 225 - 900$$

$$D = -675 < 0$$

Er is dus geen oplossing.

Somfunctie en verschilfunctie

Een **somfunctie** is het optellen van twee gegeven functies ($f(x), g(x)$):

$$s(x) = f(x) + g(x)$$

Een **verschilfunctie** is het omgekeerde van een somfunctie. Hier ga je twee gegeven functies van elkaar aftrekken ($f(x), g(x)$):

$$v(x) = f(x) - g(x)$$

Voorbeeldopgave 15: Som- en verschilfunctie

Bepaal de som- en verschilfunctie van de volgende functies:

$$f(x) = 4x - 5$$
$$g(x) = 10x - 3$$

Uitwerking

Somfunctie:

$$s(x) = f(x) + g(x)$$
$$s(x) = (4x - 5) + (10x - 3)$$
$$s(x) = 14x - 8$$

Verschilfunctie:

$$v(x) = f(x) - g(x)$$
$$v(x) = (4x - 5) - (10x - 3)$$

Let op! Zet er altijd haakjes omheen, zodat je het minteken vermenigvuldigt met de hele $g(x)$.

$$v(x) = 4x - 5 - 10x + 3$$
$$v(x) = -6x - 2$$

Samengestelde functie

Als je functies na elkaar uitvoert, krijg je een samengestelde functie. Zo kun je bijvoorbeeld twee functies f en g schakelen tot een samengestelde functie, $g(f(x))$:

$$x \to \boldsymbol{f(x)} \to u \to \boldsymbol{g(u)} \to y$$

Voorbeeld: De functie van $y(x) = sin(5x^2 + 3)$ is te schrijven als $y(x) = g(f(x))$, met:

$$f(x) = 5x^2 + 3 \qquad g(u) = \sin(u)$$

Evenredigheidsverbanden

Er zijn verschillende evenredigheidsverbanden met bijbehorende formules en grafieken die je voor het examen moet kennen:

Rechtevenredig

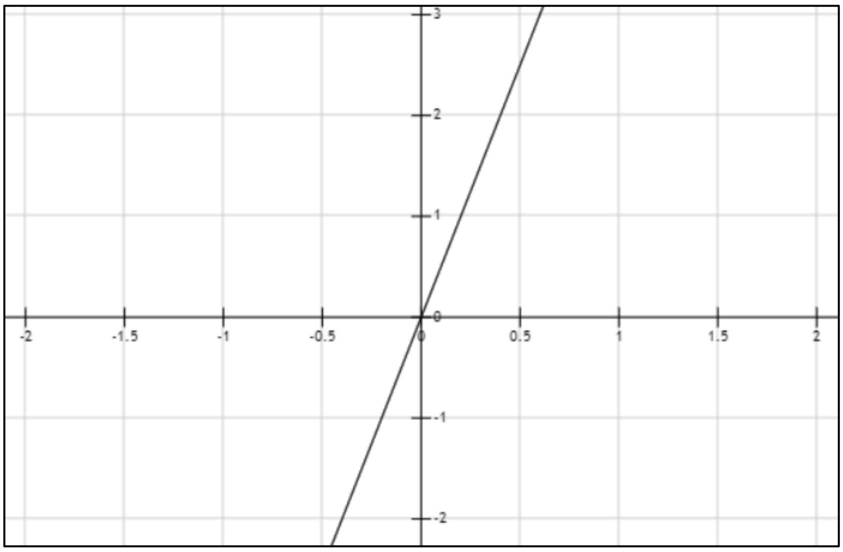
Een rechtevenredig verband is een speciaal geval van een lineair verband. Zoals je ook al eerder hebt geleerd weet je dat de formule voor een lineair verband is:

$$y = ax + b$$

Met a de evenredigheidsconstante (de verhouding tussen twee grootheden) en b het startgetal. Een recht evenredig verband is een lineair verband zonder startgeval. De formule hiervoor is dus:

$$y = ax$$

Dit betekent dus dat de andere grootheid met hetzelfde getal zal worden vermenigvuldigd als je de ene grootheid met een getal vermenigvuldigt. Dit is dus eigenlijk het geval als x bijvoorbeeld 5 keer zo groot wordt, dat y dan ook 5 keer zo groot wordt. De bijpassende grafiek van een recht evenredig verband gaat dus altijd door de oorsprong want het startgetal, b, is altijd nul!



Grafiek van: $y = 5x$.

Als je nog net even wat meer uitleg nodig hebt kan je deze QR-code scannen! Ondanks dat de titel aangeeft dat het een HAVO filmpje is, is het zeker VWO stof!

Video WisBH-B3-1

Voorbeeldopgave 16: Rechtevenredig

y is rechtevenredig met x.

$$y = 24 \quad als \quad x = 4$$

Wat is de waarde van y als x =3?

Uitwerking

Vind eerst de evenredigheidsconstante a:

$$y = ax$$

Dit kun je doen door de gegeven waardes in te vullen:

$$y = ax$$
$$24 = a * 4$$

Nu kun je a dus uitrekenen:

$$a = \frac{24}{4} = 6$$

Invullen in de formule geeft:

$$y = ax = 6x$$

Om nu y te berekenen vul je de waarde van $x = 3$ in:

$$y = 6x = 6 * 3 = 18$$

Omgekeerd evenredig

Het omgekeerde van een rechtevenredig verband is omgekeerd evenredig. De formule is dus ook het omgekeerde van de formule voor het rechtevenredig verband:

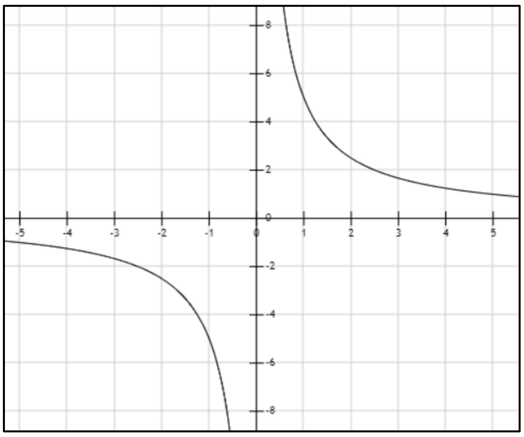
$$y = \frac{a}{x}$$

Deze formule kun je ook schrijven als:

$$y * x = a$$

Dit betekent dus dat de andere grootheid met hetzelfde getal zal worden gedeeld als je de ene grootheid met een getal vermenigvuldigt. Dit is dus eigenlijk het geval als x bijvoorbeeld 5 keer zo groot wordt, dat y dan 5 keer zo klein wordt.

De bijpassende grafiek van een omgekeerd evenredig verband is altijd een hyperbool die puntsymmetrisch is in de oorsprong:



Grafiek van: $y = \frac{5}{x}$.

Om te zorgen dat je het helemaal onder controle hebt kan je nog naar de video hiernaast kijken!

Video WisBV-A1-10

Voorbeeldopgave 17: Omgekeerd evenredig

y is omgekeerd evenredig met x.

$$y = 8 \quad als \quad x = 3$$

Wat is de waarde van y als $x = 4$?

Uitwerking

Vind eerst de evenredigheidsconstante a:

$$y = \frac{a}{x}$$

Dit kun je doen door de gegeven waardes in te vullen:

$$y = \frac{a}{x} \rightarrow \ 8 = \frac{a}{3}$$

Nu kun je a dus uitrekenen:

$$a = 8 * 3 = 24$$

Invullen in de formule geeft:

$$y = \frac{a}{x} = \frac{24}{x}$$

Om nu y te berekenen vul je de waarde van $x = 4$ in:

$$y = \frac{a}{x} = \frac{24}{4} = 6$$

Evenredig met een macht

Je spreekt van een machtsfunctie als y rechtevenredig is met een macht van x:

$$y = a * x^n$$

Dit betekent dus dat de macht van de andere grootheid met hetzelfde getal zal worden vermenigvuldigd als je de ene grootheid met een getal vermenigvuldigt. Dit is dus eigenlijk het geval als bijvoorbeeld x twee keer zo groot wordt, dat y dan $2^2 = 4$ keer zo groot wordt.

Video WisBH-B3-3

Scan deze QR-code als je het fijn vindt om het nog eens met een voorbeeld te zien. Ook dit is gewoon VWO stof, ondanks dat de titel aangeeft dat het voor de HAVO is.

Voorbeeldopgave 18: Evenredig met een macht

Een steen is gegooid van een hoge toren. De afstand die de steen valt, is evenredig met een kwadraat tot de tijd dat de steen erover doet om naar beneden te komen.

Als de steen 19,6 m valt na 2 secondes, hoe ver valt de steen dan na 3 secondes?

Uitwerking

We kunnen de volgende formule gebruiken:

$$y = a * x^n$$

Waar:

$y = de\ afstand\ die\ de\ steen\ is\ gevallen$
$x = de\ tijd$

Vind eerst de evenredigheidsconstante a:

$$y = a * x^n$$

Dit kun je doen door de gegeven waardes in te vullen:

$$19{,}6 = a * 2^2$$

Nu kun je a dus uitrekenen:

$$a = \frac{19{,}6}{4} = 4{,}9$$

Invullen in de formule geeft:

$$y = a * x^n = 4{,}9 * x^2$$

Om nu de afstand, y, te berekenen vul je de waarde van $x = 3$ in:

$$y = a * x^n = 4{,}9 * 3^2 = 44{,}1$$

Dus de steen is $44{,}1$ meter omlaaggegaan na 3 secondes.

Afsluiting domein A

Zo, dat was het eerste domein! Als je deze basisvaardigheden goed onder de knie hebt, dan ben je klaar voor het echte werk. Wees niet bang, we doen het stapje voor stapje!

Log in op onze website www.examengevat.nl, ga naar Mijn Account > Mijn leeromgeving > het desbetreffende vak en domein. Of… **scan onderstaande QR-code, dan kom je meteen bij de oefenvragen van Domein A van Wiskunde B – VWO (vergeet niet eerst in te loggen!):**

OEFENVRAGEN WB -V

Oefenopgaven Domein A

Vraag 1
Vereenvoudig deze formule zo ver mogelijk:

$$2(4x + 2)(x + 3)$$

Vraag 2
Vereenvoudig deze formule zo ver mogelijk met behulp van de merkwaardige producten:

$$(\mathbf{4x} + \mathbf{2})(\mathbf{4x} - \mathbf{2})$$

Vraag 3
Vereenvoudig deze breuk zo ver mogelijk:

$$\frac{30}{72}$$

Vraag 4
Vereenvoudig deze breuk zo ver mogelijk:

$$A - \frac{B}{C} + \frac{A}{B}$$

Vraag 5
Vereenvoudig deze breuk zo ver mogelijk:

$$\frac{\frac{2}{6}}{4} * \frac{5}{3}$$

Vraag 6
Los de vergelijking op en bepaal x:

$$5 + \frac{2x - 3}{2x} = -2$$

Vraag 7
Los de volgende vergelijking op:

$$\sqrt{2x + 8} = x$$

Vraag 8
Schrijf de volgende uitdrukkingen als één macht:

$$\frac{x^6}{x^7 * x^2}$$

Vraag 9
Vereenvoudig de volgende uitdrukking:

$$\log(6^5) + \log(\frac{2}{12})$$

$$\log(6^5) + \log\left(\frac{2}{12}\right)$$

Vraag 10
Los de volgende vergelijking op:

$$(x^2 - 11x + 28)\sqrt{x} = 0$$

Vraag 11
Los de volgende vergelijking op:

$$\sqrt{-2x+17} = x - 1$$

Vraag 12
Los de volgende vergelijking op:

$$\frac{1}{(4x+3)^2} = \frac{1}{2}$$

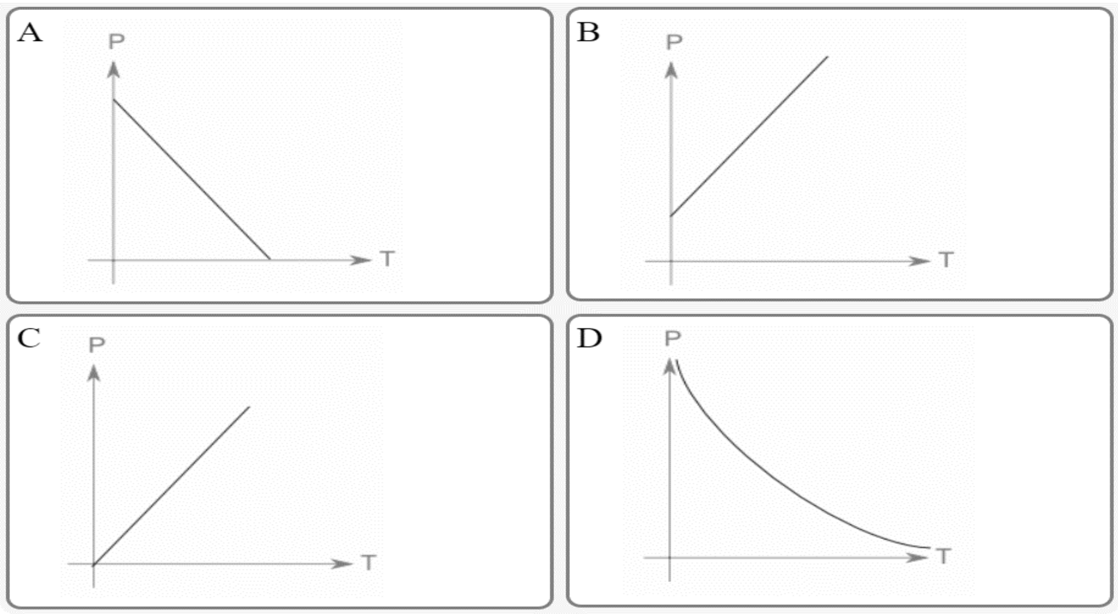
Vraag 13 (examenopgave 2017-I - vraag 16)
Gegeven is de volgende formule:

$$\log(p) = 5{,}68 - \frac{2120}{273+T}$$

In de gegeven formule is $\log(p)$ uitgedrukt in T. Druk T uit in p.

Vraag 14
P is rechtevenredig met T.

Welke van de volgende grafieken zou de connectie kunnen zijn tussen T en P?

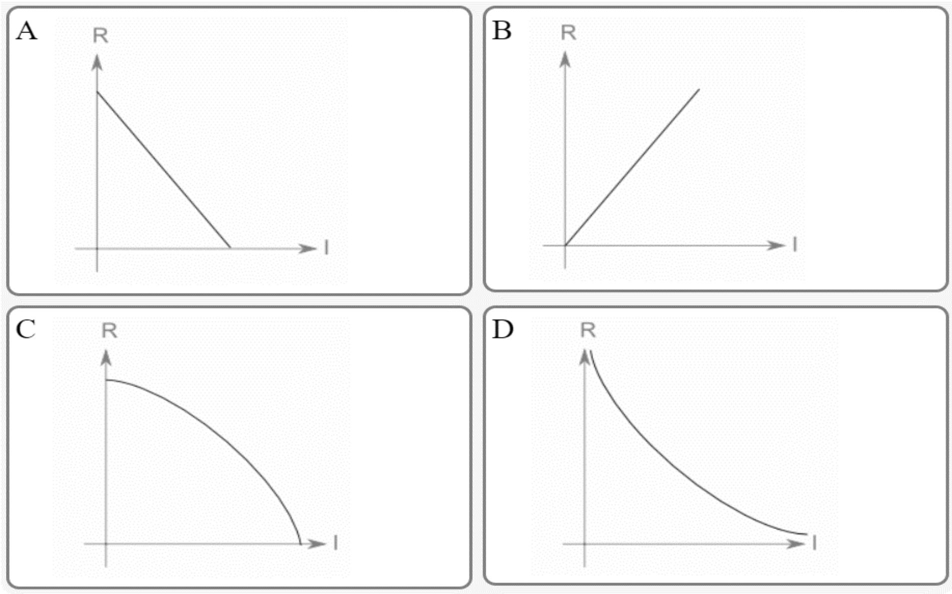


Vraag 15
De tijd (t in dagen) die nodig is om een huis te bouwen is omgekeerd evenredig met het aantal bouwvakkers (n) die allemaal tegelijkertijd werken op hetzelfde tempo.

Als er zes bouwvakkers zijn duurt het tachtig dagen om het huis af te hebben.

Bereken het aantal bouwvakkers dat moet worden aangenomen om het huis in zestien dagen af te krijgen.

Vraag 16
P is omgekeerd evenredig met T.
Welke van de volgende grafieken zou de connectie kunnen zijn tussen T en P?

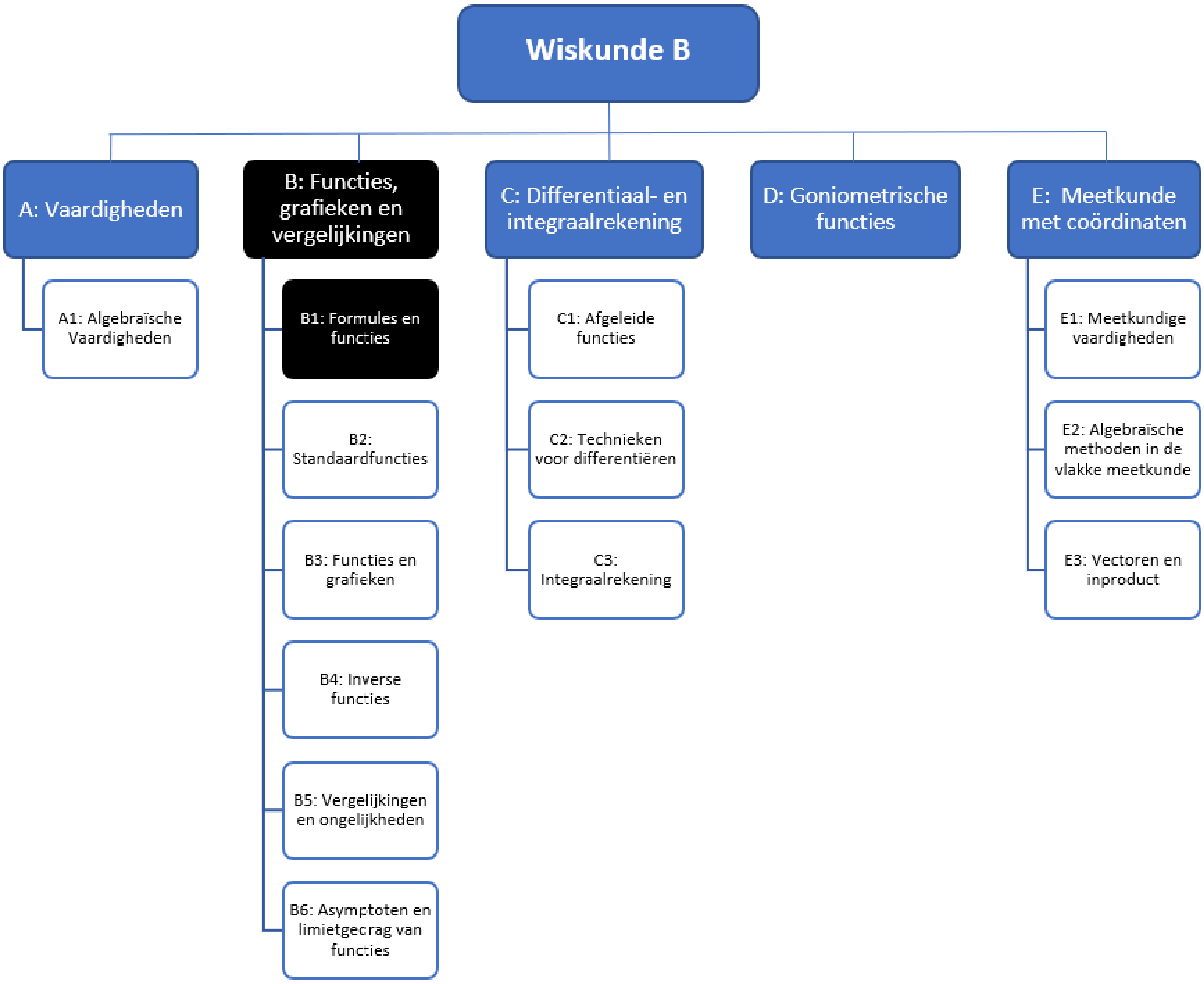


Vraag 17
De versnelling van een auto is omgekeerd evenredig met het kwadraat van de tijd vanaf het moment dat de auto is gestart.

Als de versnelling van de auto 2 minuten na de start $5\ m/s^2$ is, wat is de versnelling 5 secondes later?

Domein B1: Formules en functies

Vakoverzicht



Tijd om aan de slag te gaan met domein B. In dit domein leer je alles over functies, grafieken, vergelijkingen en asymptoten. Sommige stukjes kunnen iets lastiger zijn, maar met genoeg voorbeeldopgaves gaat het helemaal goedkomen. Succes!

Formules en functies

Wellicht dat je de termen formule en functie vaak door elkaar heen gebruikt. Dat is niet helemaal correct, want er zit wel degelijk verschil tussen. Heel kort door de bocht: het begrip “functie” is heel precies vastgelegd, het begrip “formule” is veel vager.

Een **functie** zal een bepaalde x-waarde nemen en hier een bepaalde y-waarde mee overeen laten komen. Het is belangrijk om te beseffen dat bij elke x-waarde precies één y-waarde hoort. Bijvoorbeeld: stel dat y een functie is van x, dus $y = f(x)$ met $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ Bij elke x-waarde laat deze functie f een y-waarde horen, waarbij y het kwadraat is van x. Als $x = 2$, dan is $y = 4$, enzovoorts.

Een **formule** is heel algemeen een wiskundige uitdrukking waarin cijfers maar ook symbolen kunnen voorkomen. Die uitdrukking kan heel verschillend van aard zijn. De stelling van Pythagoras ($a^2 + b^2 = c^2$, waarbij a de schuine zijde van een driehoek is) is een formule. Een ander voorbeeld is $O = 2\pi r$, voor de omtrek van de cirkel (waarbij r de straal is).

Onthoud dus vooral dat een 'functie' een exacte betekenis heeft en dat 'formule' voor veel meer gebruikt kan worden.

De meest gebruikte functie in de wiskunde is de functie f van x. Hiermee wordt bedoeld dat bij elke waarde van de variabele x een waarde $f(x)$ hoort. Je krijgt dan een grafiek met een x-as en een y-as. Ook al is $f(x)$ de meest gebruikte functie, je kunt functies hebben van allerlei variabelen. Hieronder zie je een aantal formules geschreven als functievoorschrift:

Formule	**Functie**
$b = 5a + 1$	$f(a) = 5a + 12$
$y = 3x^2 + 5x + 12$	$f(x) = 3x^2 + 5x + 1$

Nu je weet wat een functie is, gaan we er iets dieper op in! Je kunt twee formules namelijk combineren om zo een functie te krijgen van maar één variabele. Ook is het soms handig om functies om te schrijven naar hele variabelen, zodat ze makkelijker te herleiden zijn. Dit kun je doen met behulp van de algemene regels die je in domein A hebt geleerd tijdens het substitueren van vergelijkingen. Laten we eens naar een paar voorbeeldopgaven gaan kijken!

Voorbeeldopgave 1: Functies combineren

Combineer de volgende twee formules, zodat je de functie van y kunt uitdrukken in x. Bereken vervolgens de waarde van y voor $x = 5$.

$$y = 3z + 5 - 7x + 12$$

$$z = 3x - 5$$

Uitwerking

Combineer de twee formules door z in te vullen in y. Zo verwijder je de hele variabele z:

$$y = 3(3x - 5) + 5 - 7x + 12$$

De vergelijking uitschrijven geeft:

$$y = 9x - 15 + 5 - 7x + 12$$

$$y = 2x + 2$$

Nu kun je y schrijven als functie van alleen maar x:

$$y(x) = 2x + 2$$

Als je dan $y(5)$ wilt berekenen, vul je voor de x een 5 in en krijg je voor y één specifieke waarde:

$$y(5) = 2 * 5 + 2 = 12$$

Voorbeeldopgave 2: Functies herleiden

Reken x uit met behulp van de algemene regels van de volgende vergelijking:

$$12 * x^3 * (x + 5) = 6 * x^3$$

Uitwerking

Als je een beetje dieper kijkt, kun je zien dat je de volgende algemene regel uit domein A kunt gebruiken:

$$A * B = A \quad \rightarrow \quad A = 0 \; of \; B = 1$$

Als we de vergelijking omschrijven naar dezelfde verhoudingen als de algemene regel krijg je namelijk:

$$6 * x^3 * 2 * (x + 5) = 6 * x^3$$

$$A * B = A$$

$$A = 0 \quad of \quad B = 1$$

Dus:

$$6 * x^3 = 0 \quad of \quad 2 * (x + 5) = 1$$

$$x^3 = 0 \quad of \quad 2 * (x + 5) = 1$$

$$x = 0 \quad of \quad x + 5 = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \quad of \quad x = -4\frac{1}{2}$$

Controleren of $x = 0$ en $x = -4\frac{1}{2}$ voldoen door ze in te vullen in de vergelijking:

$x = 0 \rightarrow 12 * 0^3 * (0 + 5) = 6 * 0^3$ Voldoet

$x = -4\frac{1}{2} \rightarrow 12 * (-4\frac{1}{2})^3 * \left((-4\frac{1}{2}) + 5\right) = 6 * (-4\frac{1}{2})^3$ Voldoet

Oefenopgaven Domein B1

Vraag 1
Combineer de volgende twee formules, zodat je de functie van y kunt uitdrukken in x. Bereken vervolgens de waarde van y voor $x = 2$.

$$y = 5x + 4z + 3 - 7x + 4$$

$$z = x - 2$$

Vraag 2
Reken x uit met behulp van de algemene regels van de volgende functie:

$$4 * (x - 2) * 2 * x^4 = 4 * x^4$$

Vraag 3
Combineer de volgende formules, zodat je de functie van y kunt uitdrukken in x.

$$2y + 4x + 5z = 30$$

$$5z = x^2 - 2$$

Vraag 4
Combineer de volgende formules, zodat je de functie van N kunt uitdrukken in t.

$$N = 20\sqrt{5 - \frac{3z}{4}}$$

$$3z - 30 = -6t$$

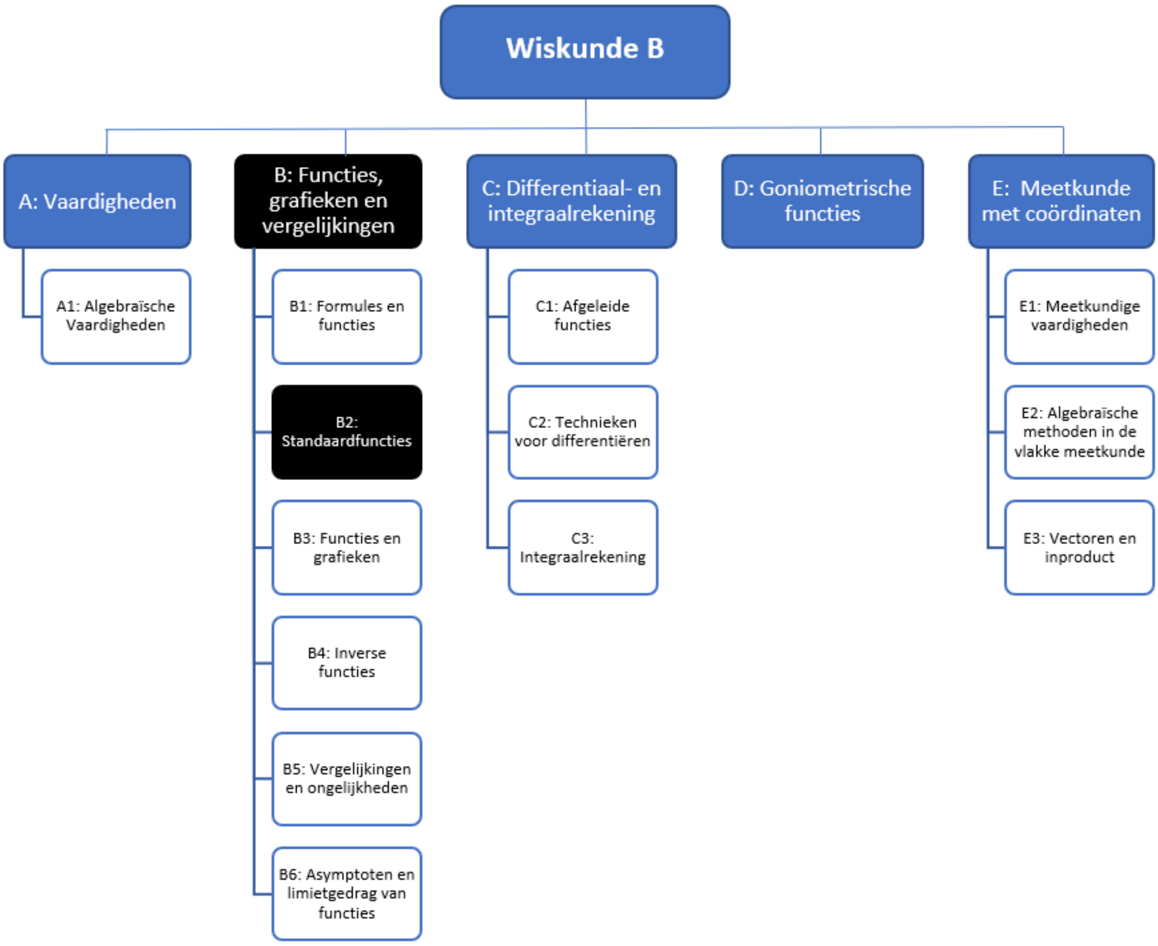
Vraag 5
Combineer de volgende formules, zodat je de functie van N kunt uitdrukken in t.

$$N = z^2 + 3z - 20$$

$$z^2 = 5 - 4t$$

Domein B2: Standaardfuncties

Vakoverzicht



Nu we weten hoe we functies kunnen herleiden en combineren is het ook handig om te weten hoe we standaardfuncties moeten aanpakken. Zo weet je precies wat je moet doen als je een bepaalde functie ziet!

Na B2 moet het je helemaal lukken om machtsfuncties met rationale exponenten, exponentiële functies, logaritmische functies, goniometrische functies en de absolute waardefunctie te herkennen en te gebruiken. Klinkt dit na al die jaren op school nog een beetje als abracadabra? Geen probleem, we gaan alles stapje voor stapje af. Maar voordat we aan de gang gaan, is het handig om eerst wat uitleg te krijgen over de karakteristieke eigenschappen van functies.

Karakteristieke eigenschappen van functies

Noem karakteristieke eigenschappen maar de spelregels van functies. En zoals je weet moet je eerst de spelregels snappen voordat je een spel of sport, écht kunt begrijpen. Bij wiskunde is dat niet anders. We gaan de volgende karakteristieke eigenschappen doornemen, die je nodig hebt voor je examen:

- **Domein en bereik**
- **Nulpunt**
- **Extreme waardes**
- **Absolute minimum/maximum**

Laten we eens beginnen met de termen domein en bereik. **Domein** en **bereik** zijn alle waardes die in een bepaalde functie kunnen zitten. Belangrijk om te weten is dat je ze met vierkante haakjes en driehoekige haakjes kunt aanduiden:

Gesloten interval	Open interval	Halfopen interval
$[\ldots]$	$\langle\ldots\rangle$	$[\ldots\rangle$ of $\langle\ldots]$
Inclusief buitenste grenzen	Exclusief buitenste grenzen	Inclusief & exclusief buitenste grenzen

Domein

Alle mogelijke waarden van x waarvoor de formule een uitkomst y geeft, is het **domein** van een bepaalde functie. Een domein werkt dus alleen bij de x-as. Het domein bereken je door te kijken voor welke waardes van x er een reëel getal uit de functie komt.

Bereik

Het **bereik** van een functie bestaat uit alle mogelijke waarden voor y. Het bereik werkt dus alleen bij de y-as. Het bereik bereken je door het domein in te vullen in een functie en zo de y-waardes te bepalen.

Wil je zien hoe je het Domein en Bereik van een formule vindt? Scan dan deze QR-code!

Video WisBV-B2-1

Tip! Je kunt het verschil tussen het domein en bereik onthouden door:

D**o**mein=h**o**rizontaal

B**e**reik=v**e**rticaal

Interval

Soms kan het zijn dat een bepaalde waarde x tussen bijvoorbeeld de 2 en 6 ligt. Dit noem je dan een **interval**. Je schrijft dan het volgende op:

$$2 < x < 6$$

In dit geval wordt gesproken van een **open** interval, omdat x alleen over de getallen tussen de 2 en 6 gaat. Hierbij doen 2 en 6 dus niet mee. Een open interval kun je ook zo opschrijven in de vorm van een **intervalnotatie**:

$$\langle 2,6\rangle$$

Als je praat over een interval waarbij de linker- en rechtergrens wel tot het interval behoren, praat je over een **gesloten** interval. Dit schrijf je op als volgt:

$$2 \leq x \leq 6$$

Of als:

$$[2,6]$$

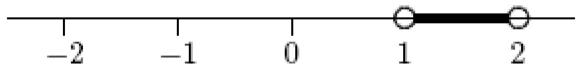
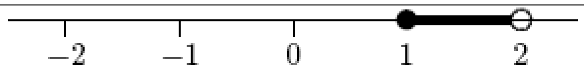
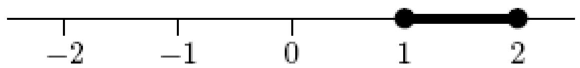
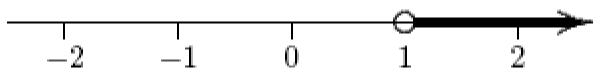
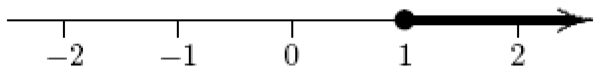
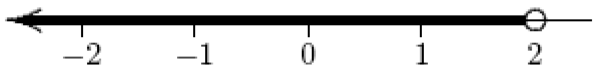
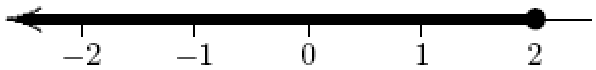
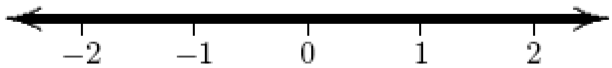
Je kunt ook een halfopen en halfgesloten interval hebben. In $[2,6\rangle$ doet 2 dus wel mee (gesloten) en doet 6 niet mee (open).

Wanneer het een interval is onder/boven een bepaald getal dan kun je dit aanduiden met een pijltje. Zo is bijvoorbeeld een interval van x is 2 of hoger:

$$[2,\rightarrow\rangle$$

Om een interval wat duidelijker te visualiseren kun je deze ook op een getallenlijn zetten. Een gesloten rondje duidt aan dat het een gesloten interval is. Een open rondje duidt aan dat het een open interval is. Bij een pijltje zie je dat het tot oneindig is.

Hieronder zie je een paar voorbeelden:

Getallenlijn	**Intervalnotatie**
	$\langle 1,2\rangle$
	$[1,2\rangle$
	$[1,2]$
	$\langle 1,\rightarrow\rangle$
	$[1,\rightarrow\rangle$
	$\langle\leftarrow,2\rangle$
	$\langle\leftarrow,2]$
	$\langle\leftarrow,\rightarrow\rangle$

Voorbeeldopgave 1: Interval

Schrijf de volgende ongelijkheid op als een intervalnotatie:

$$4 \leq x < 9$$

Uitwerking

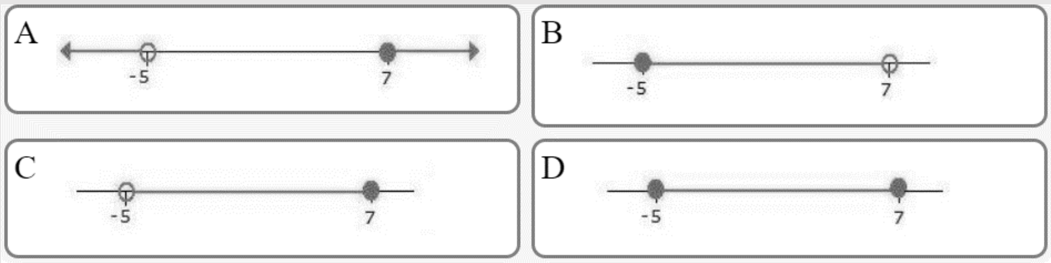
Het interval is dus een halfopen interval waar 4 er wel bij hoort en 9 er niet bij hoort. Het juiste antwoord is dus:

$$[4\,,9\rangle$$

Voorbeeldopgave 2: Interval

Welke van de volgende getallenlijnen illustreert het volgende interval:

$$-5 < x \leq 7$$



Uitwerking

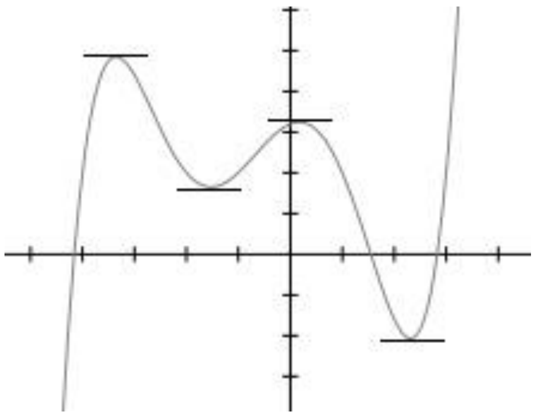
Het interval is dus een halfopen interval waar -5 er niet bij hoort en 7 er wel bij hoort. Het juiste antwoord is dus:

Nulpunt

Een **nulpunt** van een functie is wanneer de functie $f(x)$ de x-as snijdt. Dit is dus de oplossing van de vergelijking $f\,(x) = 0$. De nulpunten zijn dus de $x -$ coördinaten van de snijpunten van de grafiek $f(x)$ met de x-as.

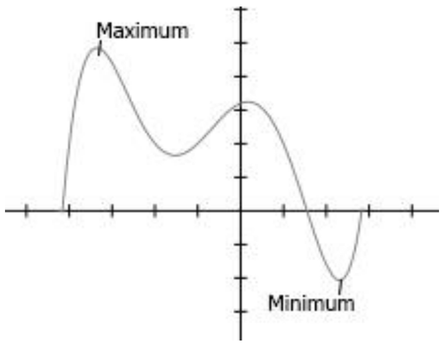
Extreme waardes

De **extreme waardes** zijn de plaatselijke maxima en minima van een bepaalde functie. Dit zijn dus alle toppen in een grafiek:



Absolute minimum/maximum

Het absolute minimum is de laagste y-waarde van de gehele functie, het absolute maximum is de hoogste waarde van de gehele functie. Dit is in tegenstelling tot de lokale minimum/maximum, wat de waardes zijn van alle pieken in een grafiek. Hieronder hebben we de absolute waardes voor je aangegeven:

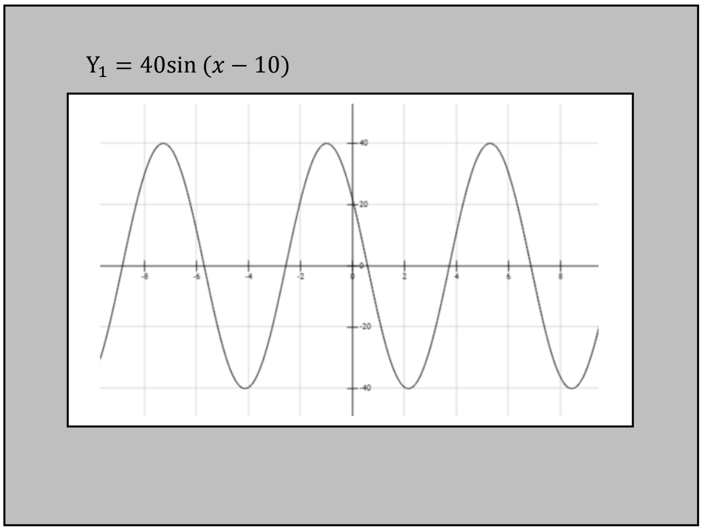


Je kunt het absolute minimum en maximum aflezen vanuit je GR.

Vul $f(x)$ in, in je GR :

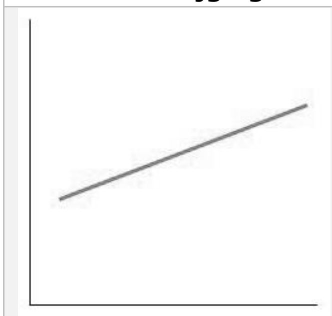
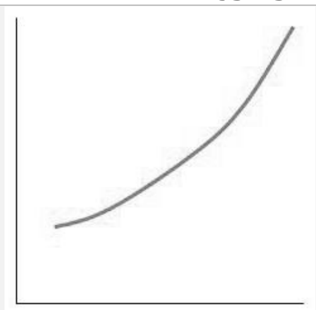
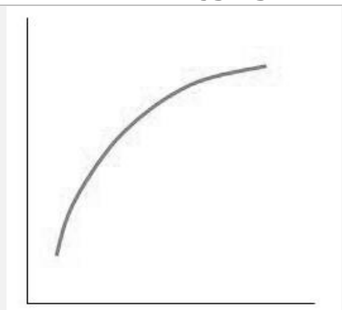
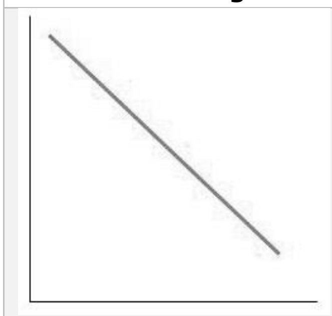
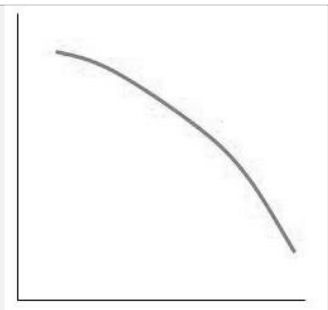
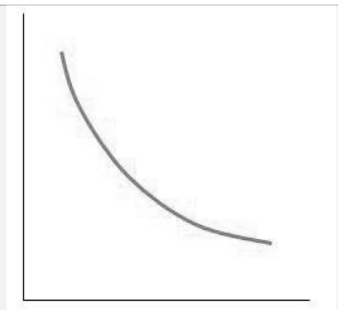
$$Y_1 = 40\sin\,(x - 10)$$

MAXIMUM geeft $y = 40$
MINIMUM geeft $y = -40$



Stijgen/Dalen

Je bent vast bekend met het feit dat grafieken kunnen stijgen of dalen. Maar weet je ook nog dat er verschillende soorten stijgen en dalen bestaan? Bij een constante stijging/daling zie je dat de grafiek een rechte lijn is. Bij een toenemende stijging/daling wordt de grafiek steeds steiler, terwijl bij een afnemende stijging/daling de grafiek steeds vlakker wordt.

Constante stijging	**Toenemende stijging**	**Afnemende stijging**
		
Constante daling	**Toenemende daling**	**Afnemende daling**
		

Voorbeeldopgave 3: Domein

Bereken het domein van de volgende functie:

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

Uitwerking

Alles onder een wortelteken moet positief zijn, want de wortel van een negatief getal kun je niet uitrekenen, weet je nog? Daarom stellen we het volgende:

$$4 - x^2 \geq 0$$

$$-x^2 \geq -4$$

Het teken klapt nu om, omdat er wordt gedeeld door een negatief getal (-1):

$$x^2 \leq 4$$

$$-2 \leq x \leq 2$$

Dus het domein is inclusief de buitenste waardes:

$$[-2,2]$$

Voorbeeldopgave 4: Bereik

Bereken het bereik van de volgende functie:

$$f(x) = 5 + \sqrt{3 - 2x}$$

Uitwerking

Alles onder een wortelteken moet positief zijn. Daarvoor:

$$3 - 2x \geq 0$$
$$-2x \geq -3$$
$$2x \leq 3$$
$$x \leq 1{,}5$$

Het domein van deze functie is dus:

$$\langle \leftarrow; 1{,}5]$$

Het bereik bereken je nu door het domein in te vullen in de functie:

$$f(x) = 5 + \sqrt{3 - 2 * 1{,}5} = 5$$

Het bereik is dus:

$$[5, \rightarrow\rangle$$

Ga maar na… hoe lager de x-waarde is die je invult (kleiner dan 1,5), hoe hoger de y-waarde wordt (vanaf 5).

Voorbeeldopgave 5: Nulpunt

Bereken het nulpunt van de volgende functie:

$$f(x) = 5x + 2$$

Uitwerking

Voor een nulpunt is $f(x) = 0$:

$$f(x) = 5x + 2 = 0$$

$$5x = -2$$

$$x = -\frac{2}{5}$$

Het nulpunt van de functie is dus $(-\frac{2}{5}, 0)$.

Karakteristieke eigenschappen van grafieken

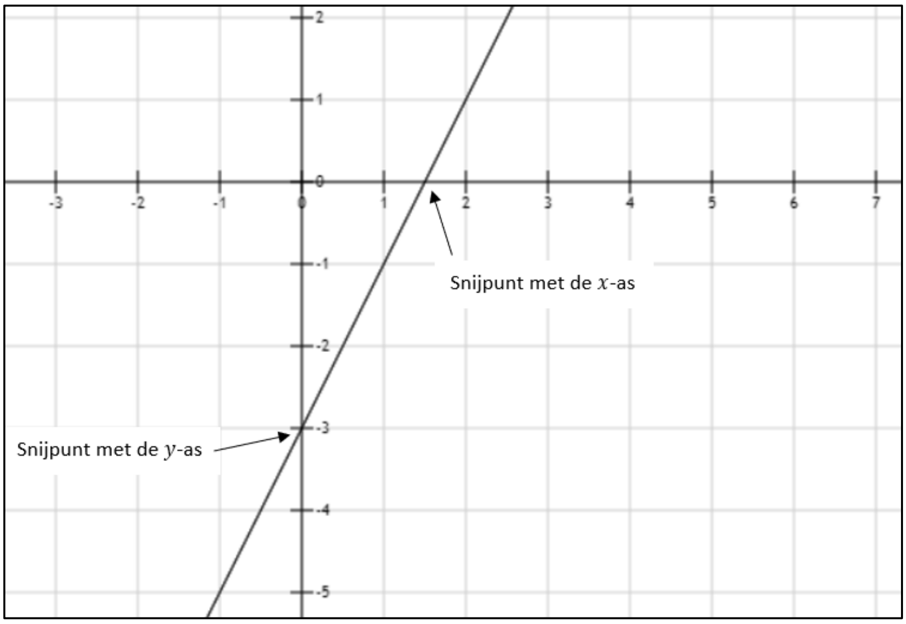
Ook grafieken hebben karakteristieke eigenschappen. Als je de volgende aspecten van grafieken weet dan gaat het op je examen helemaal goedkomen:

- **Snijpunt met de x-as en de y-as**
- **Top**
- **Buigpunt**
- **Lijnsymmetrie**
- **Asymptotisch gedrag**

We gaan weer aan de slag, nu met de snijpunten!

Snijpunt met de x-as/y-as

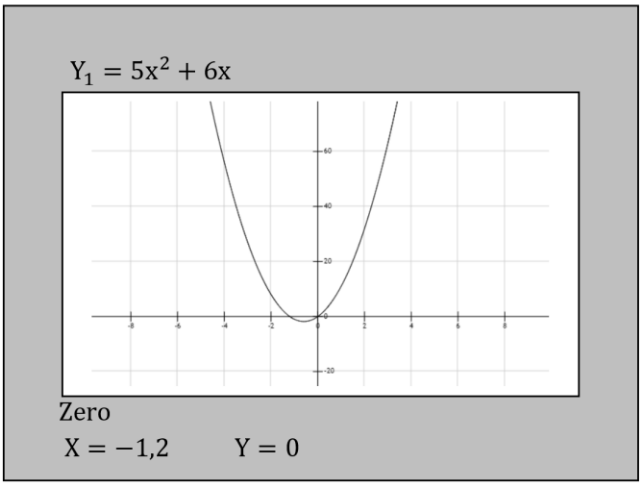
Bij een snijpunt met de x-as is $y = 0$. Bij een snijpunt met de y-as is $x = 0$.



Met een grafisch rekenmachine kun je het snijpunt met de x-as als volgt berekenen:

$$Y_1 = 5x^2 + 6x$$

CALC zero geeft $x = -1{,}2 \;\; of \; x = 0$
Dus de snijpunten met de x-as zijn $(-1{,}2\,; 0)\; en\; (0, 0)$



Top

De top van een grafiek is de grootste of kleinste waarde van een parabool. Voor een kwadratische parabool geldt:

$$y = ax^2 + bx + c$$

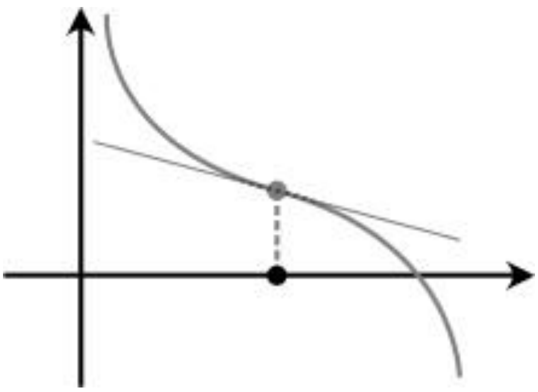
De top van deze parabool is dan:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Deze x kun je vervolgens in de vergelijking invullen om de y-coördinaat te berekenen.
We gaan hier zo meteen een voorbeeldopgave over maken, dan zul je zien hoe je met deze formules omgaat.

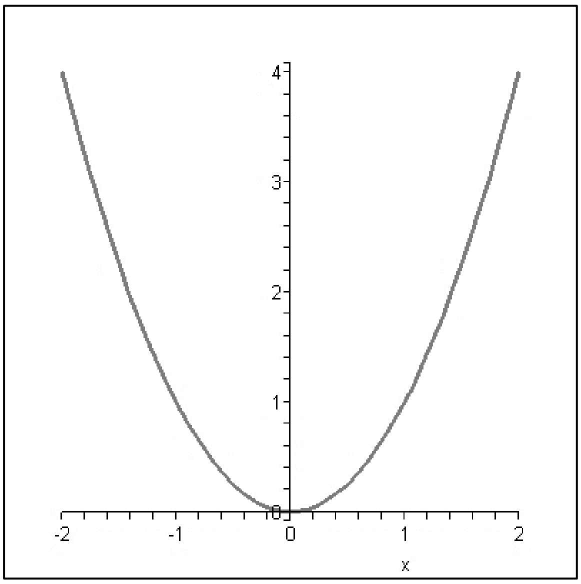
Buigpunt

In de wiskunde is een buigpunt van een grafiek een punt op de grafiek waar de kromming van steilheid verandert. Zoals je eerder al hebt geleerd heb je verschillende soorten stijgen en dalen. Het buigpunt zit op het omslagpunt tussen deze twee. In de volgende grafiek zie je bijvoorbeeld eerst een afnemende daling, dan het buigpunt en vervolgens een toenemende daling.



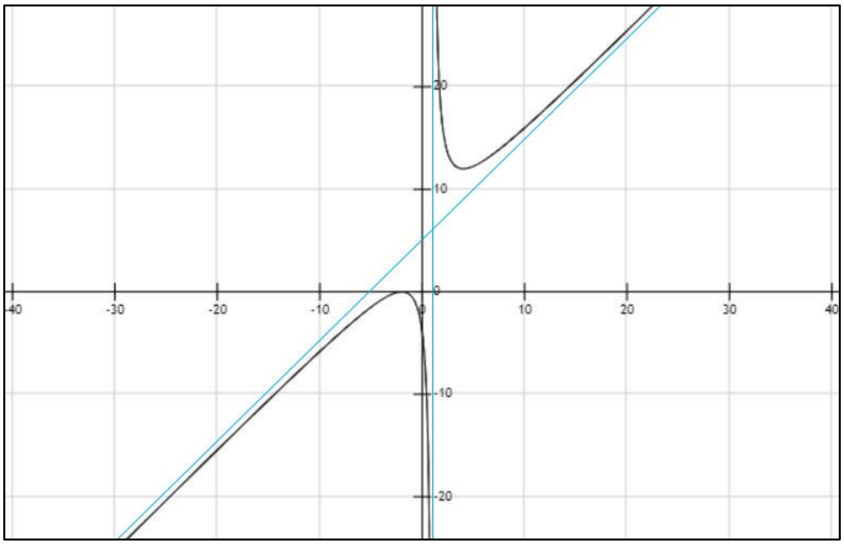
Lijnsymmetrie

Lijnsymmetrie is de regelmaat van een figuur, zodat de ene helft beschouwd kan worden als het spiegelbeeld van de andere. In het volgende figuur zie je bijvoorbeeld een symmetrische functie rond de y-as. Als je namelijk een spiegel op de y-as zou zetten dan zou je hetzelfde zien!



Asymptotisch gedrag

Je hebt verschillende asymptoten: horizontale, verticale en scheve asymptoten. Een horizontale asymptoot kun je vinden door een grote waarde van x in de functie $f(x)$ in te vullen. De verticale asymptoot vind je meestal door de noemer in een functie gelijk te stellen aan nul. We benoemen het hier maar even kort, maar in domein B6 gaan we veel uitgebreider met asymptoten aan de gang!



Voorbeeldopgave 6: Snijpunt met y-as

Bereken het snijpunt met de y-as van de volgende functie:

$$f(x) = e^{5x^2+x} + 1$$

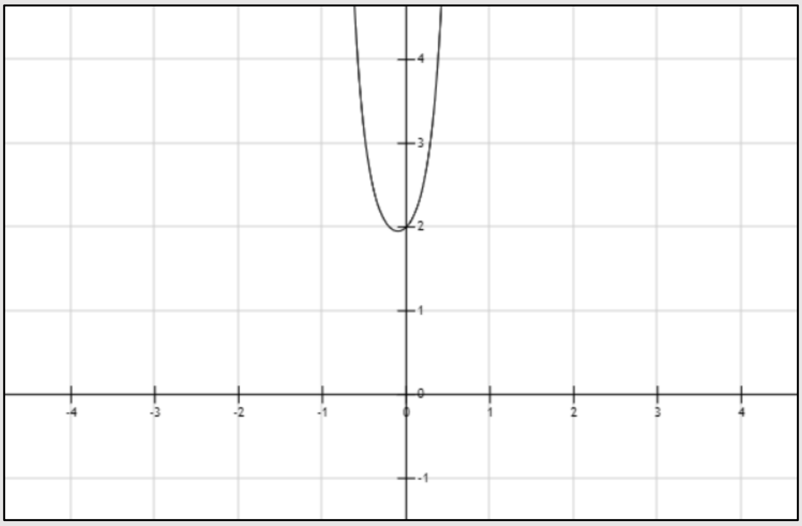
Uitwerking

Voor een snijpunt met de y-as is $x = 0$. Dit invullen geeft:

$$f(0) = e^0 + 1 = 2$$

Het snijpunt met de y-as is dus: $(0,2)$

Dit klopt, want als je de grafiek tekent, zie je hetzelfde:



Voorbeeldopgave 7: Snijpunt met x-as

Bereken het snijpunt met de x-as van de volgende functie:

$$f(x) = 2x^2 - 72$$

Uitwerking

Voor een snijpunt met de x-as is $y = 0$. Dit invullen geeft:

$$0 = 2x^2 - 72$$

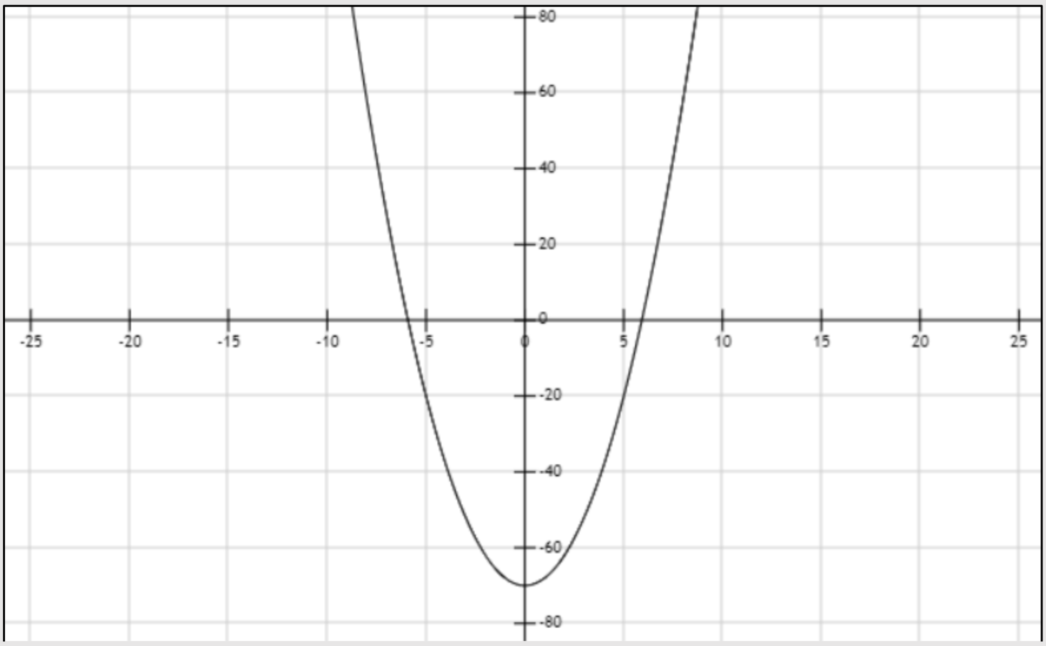
$$2x^2 = 72$$

$$x^2 = 36$$

$$x = 6 \quad of \quad x = -6$$

Het snijpunt met de x-as is dus: $(6,0)$ en $(-6,0)$.

Dit klopt, want als je de grafiek tekent, zie je hetzelfde:



Voorbeeldopgave 8: Top

Bereken de coördinaten van de top van de volgende parabool:

$$f(x) = x^2 - 10x + 5$$

Uitwerking

Voor een kwadratische parabool geldt:

$$y = ax^2 + bx + c$$

De top van deze parabool is dan:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Als we hetzelfde doen bij de functie:

$$f(x) = x^2 - 10x + 5$$

$$a = 1$$

$$b = -10$$

$$c = 5$$

De x-coördinaat van de top wordt dan:

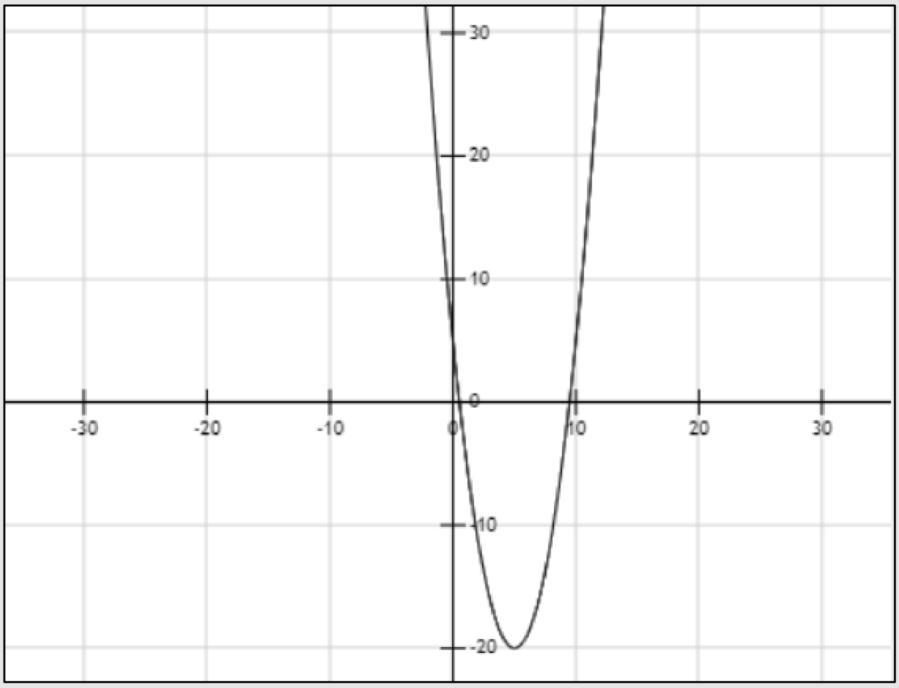
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-10}{2 * 1} = 5$$

Deze invullen in $f(x)$:

$$f(5) = 5^2 - 10 * 5 + 5 = -20$$

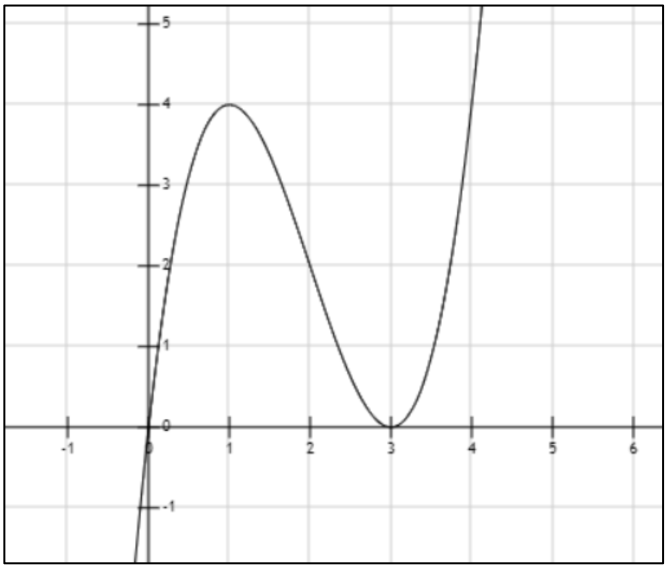
De top van de parabool bevindt zich dus op punt $(5, -20)$

Dit klopt, want als je de grafiek tekent, zie je hetzelfde:



Toenamediagram

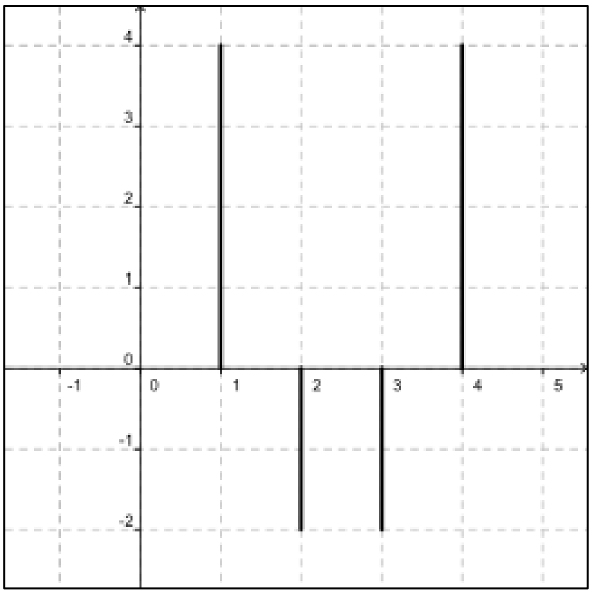
Bij een toenamediagram kijk je hoeveel een y verandert wanneer x verandert. Kijk naar elke stap van x hoe y verandert. Je moet dus eigenlijk weer gebruik maken van intervallen. Het is het makkelijkste te begrijpen met behulp van een figuur:



De toenametabel van deze functie op interval [0,4] is bijvoorbeeld:

x	y	Δy
0	0	-
1	4	4
2	2	-2
3	0	-2
4	4	4

Met deze tabel kun je nu een toenamediagram tekenen:



Machtsfuncties

Uit een **machtsfunctie** kun je de vorm van een bepaalde grafiek opmaken. Een machtsfunctie is altijd in de vorm:

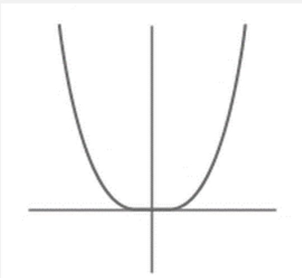
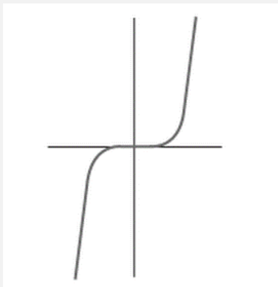
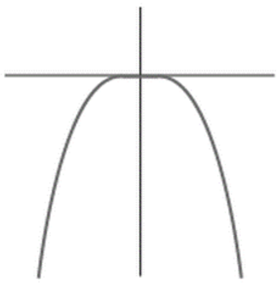
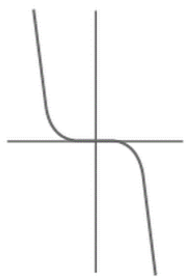
$$f(x) = ax^n \qquad a \neq 0$$

Hoe de grafiek van een machtsfunctie eruitziet, ligt totaal aan a en n. Wanneer n **even** is, is de grafiek altijd gespiegeld in de $y-as$. Als n **oneven** is, heeft de grafiek een centrum van puntsymmetrie rondom de oorsprong $(0,0)$.

Oneven/Even grafiek

Wanneer een *even* grafiek een minimum als top heeft, of als een functie van links naar rechts stijgt bij een *oneven* grafiek, is a positief. Als de *even* grafiek een maximum als top heeft, of een *oneven* grafiek daalt van links naar rechts, dan is a negatief.

We hebben dit nog even overzichtelijk voor je neergezet in de volgende tabel:

	$\boldsymbol{n}$ is even	$\boldsymbol{n}$ is oneven
$\boldsymbol{a}$ is positief ($\boldsymbol{a > 0}$)	 **Domein:** alle reële getallen ($\mathbb{R}$) **Bereik:** $[0, \rightarrow\rangle$	 **Domein:** alle reële getallen ($\mathbb{R}$) **Bereik:** alle reële getallen ($\mathbb{R}$)
$\boldsymbol{a}$ is negatief ($\boldsymbol{a < 0}$)	 **Domein:** alle reële getallen ($\mathbb{R}$) **Bereik:** $\langle\leftarrow, 0]$	 **Domein:** alle reële getallen ($\mathbb{R}$) **Bereik:** alle reële getallen ($\mathbb{R}$)

Een ezelsbruggetje om deze tabel te onthouden? Als a positief is, zal de grafiek altijd na $x = 0$ stijgen. Als a negatief is, zal de grafiek altijd dalen na $x = 0$.

En als de n even is, dan ontstaat er een smiley oftewel parabool. De grafiek is symmetrisch, de twee kanten hebben elkaars evenbeeld. Je bent 'even' blij (wanneer a positief is, lachende smiley), of 'even' ongelukkig (als a negatief is, een ongelukkige smiley). Als de n oneven is dan is de grafiek juist niet symmetrisch.

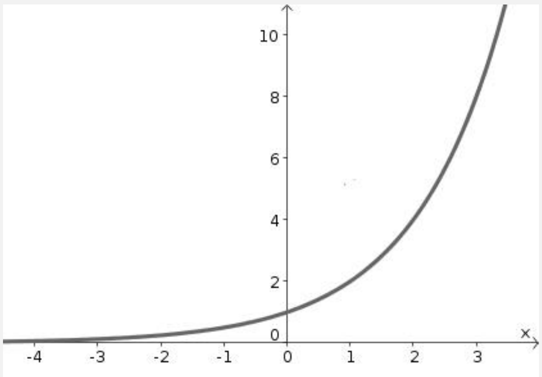
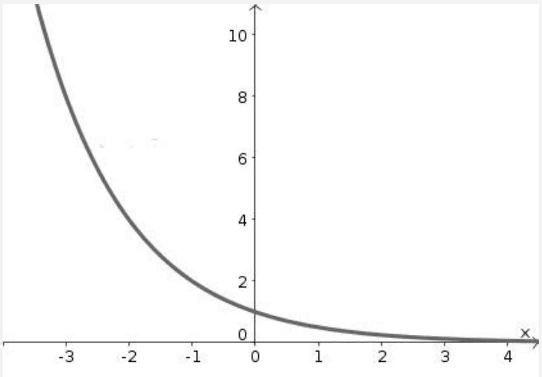
We vragen een beetje verbeelding voor dit ezelsbruggetje, maar wellicht dat je het zo beter kunt onthouden!

Exponentiële functies

Exponentiële functies zijn altijd in de vorm:

$$f(x) = g^x$$
$$g > 0 \quad en \quad g \neq 1$$

Voor exponentiële functies geldt dat als $g > 1$ de grafiek stijgend is en dat bij $0 < g < 1$ de grafiek dalend is:

$\boldsymbol{g > 1}$	$\boldsymbol{0 < g < 1}$
	
Snijpunt y-as: $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$	**Snijpunt y-as**: $(0,1)$
Domein: **alle reële getallen ($\mathbb{R}$)**	**Domein:** alle reële getallen ($\mathbb{R}$)
Bereik: $\langle \mathbf{0}, \rightarrow \rangle$	**Bereik:** $\langle 0, \rightarrow \rangle$
Asymptoot: $\boldsymbol{y = 0}$	**Asymptoot:** $y = 0$

Zoals je in de grafiek kunt zien is het snijpunt met de y-as altijd $(0,1)$. Dit komt doordat als je $x = 0$ invult in de exponentiële functie het niet uitmaakt wat de waarde van het grondtal g is, het antwoord is altijd 1:

$$f(x) = g^0 = 1$$

De toename van een exponentiële groei is evenredig aan de eigen omvang. Hoe groter de g, hoe groter de groei. Je hebt stijgende en dalende exponentiële groei. Hierbij hoort meestal de formule:

$$N = b * g^t$$

Met:

$N = aantal$
$t = tijd$
$b = beginwaarde, snijpunt\ met\ de\ verticale\ as$
$g = groeifactor\ per\ tijdseenheid$

In deze video zie je hoe de formule wordt toegepast op een voorbeeld.

Video WisBV-B2-2

Als de tijd n keer zo groot wordt	$\boldsymbol{g^{n*t}}$
Als de tijd n keer zo klein wordt	$\boldsymbol{g^{\frac{1}{n}*t}}$
de verdubbelingstijd De tijd voordat de hoeveelheid is verdubbeld.	$\boldsymbol{g^t = 2} \rightarrow\ \ bereken\ t$
de halveringstijd De tijd voordat de hoeveelheid is gehalveerd.	$\boldsymbol{g^t = \frac{1}{2}} \rightarrow\ \ bereken\ t$

Soms krijg je de groeifactor per uur maar ben je benieuwd naar de groeifactor per dag. Deze kun je dan berekenen met behulp van de bovenstaande tabel. De tijd wordt dan namelijk 24 keer groter dus dan wordt het g^{24*t}.

We gaan zo meteen aan de gang met een voorbeeldopgave, maar eerst moeten we nog heel even kijken naar het groeipercentage.

Groeipercentage

Wanneer je een **groeipercentage** krijgt, moet je deze eerst omzetten naar een getal. Dit kun je doen door eerst het percentage te bepalen en daarna te delen door 100. Vervolgens kun je dit optellen als de hoeveelheid toeneemt of aftrekken als de hoeveelheid afneemt.

Percentage	Getal	Groeifactor per dag	Groeifactor per week	Groeifactor per uur	Groeipercentage per uur
De toename per dag is 15%.	0,15	$1 + 0{,}15 = 1{,}15$	$1{,}15^7$	$1{,}15^{1/24} = 1{,}0058$	$0{,}58\%$
De afname per dag is 20%.	0,2	$1 - 0{,}2 = 0{,}8$	$0{,}8^7$	$0{,}8^{\frac{1}{24}} = 0{,}9907$	$-0{,}93\%$
De toename per dag is 100%.	1	$1 + 1 = 2$	2^7	$2^{1/24} = 1{,}0293$	$2{,}9\%$

Voorbeeldopgave 9: Exponentiële functies

Wat is de groeifactor per dag bij een groei van 340% per week?

Uitwerking

Als je het percentage omschrijft naar een getal krijg je dat het toeneemt met 3,4. De groeifactor per week is dan:

$$1 + 3{,}4 = 4{,}4$$

Nu moeten we deze nog omrekenen naar per dag. Dit doe je door de groeifactor tot de macht $\frac{1}{7}$ te doen, want een dag is $\frac{1}{7}$ week. Dan krijg je als groeifactor per dag:

$$4{,}4^{1/7} = 1{,}24$$

Voorbeeldopgave 10: Halveringstijd

Gegeven is de volgende formule:

$$N = 3 * 0{,}8^t$$

Hierin is t de tijd in jaren. Bereken de halveringstijd in maanden.

Uitwerking

Optie 1:

Voor halveringstijd geldt er dat $g^t = \frac{1}{2}$

Dit geeft:

$$0{,}8^t = \frac{1}{2}$$

Oplossen geeft:

$$t = {}^{0{,}8}\log\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$t = 3{,}1\ jaar$$

Dit is dus $3{,}1 * 12 = 37{,}2$

De halveringstijd in maanden is dus 37.

Optie 2:

Een alternatief is dat je eerst de groeifactor per maand uitrekent:

$$Groeifactor\ per\ jaar = 0{,}8$$

$$Groeifactor\ per\ maand = 0{,}8^{\frac{1}{12}} =$$

Voor halveringstijd geldt er dat $g^t = \frac{1}{2}$

Dit geeft:

$$0{,}8^{\left(\frac{1}{12}\right)^t} = \frac{1}{2}$$

Oplossen geeft:

$$t = {}^{0{,}8^{\left(\frac{1}{12}\right)}}\log\left(\frac{1}{2}\right)$$

$t = 37{,}2$ maanden

De halveringstijd in maanden is dus 37.

Voorbeeldopgave 11: Verdubbelingstijd

Gegeven is de volgende formule:

$$N = 4 * 1{,}2^t$$

Hierin is t de tijd in jaren. Bereken de verdubbelingstijd in weken.

Uitwerking

<u>Optie 1:</u>

Voor verdubbelingstijd geldt er dat $g^t = 2$

Dit geeft:

$$1{,}2^t = 2$$

Oplossen geeft:

$$t = {}^{1{,}2}\log(2)$$

$t = 3{,}802$ jaar

Dit is dus $3{,}802 * 52 = 197{,}7$.

De verdubbelingstijd in weken is dus 198.

<u>Optie 2:</u>

Een alternatief is dat je eerst de groeifactor per maand uitrekent:

$$Groeifactor\ per\ jaar = 1{,}2$$

$$Groeifactor\ per\ week = 1{,}2^{\frac{1}{52}} =$$

Voor verdubbelingstijd geldt er dat $g^t = 2$

Dit geeft:

$$\left(1{,}2^{\left(\frac{1}{52}\right)}\right)^t = 2$$

Oplossen geeft:

$$t = {}^{1{,}2^{\left(\frac{1}{52}\right)}}\log(2)$$

$t = 197{,}7$ weken

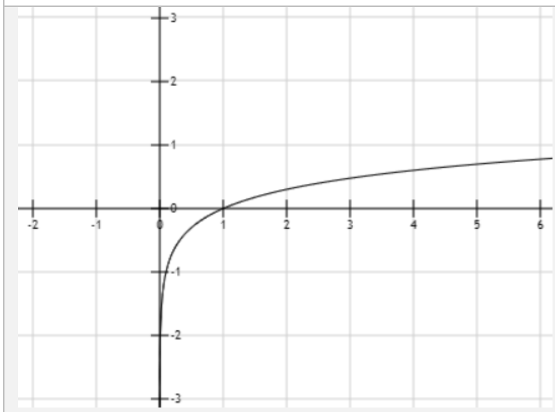
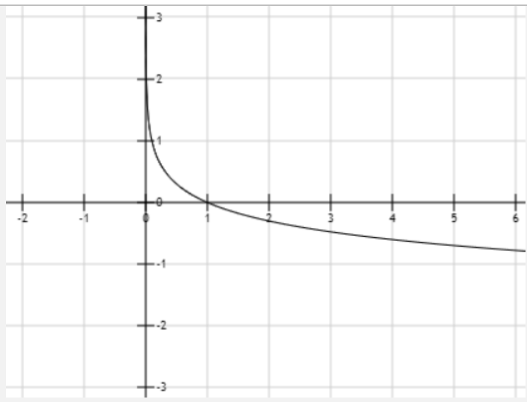
De verdubbelingstijd in weken is dus 198 weken.

Logaritmische functies

Zoals ook al in de algemene vaardigheden is uitgelegd, is een **logaritmische functie** het omgekeerde van een exponentiële functie. Een logaritmische functie is in de vorm:

$$f(x) = {}^{g}\log(x)$$

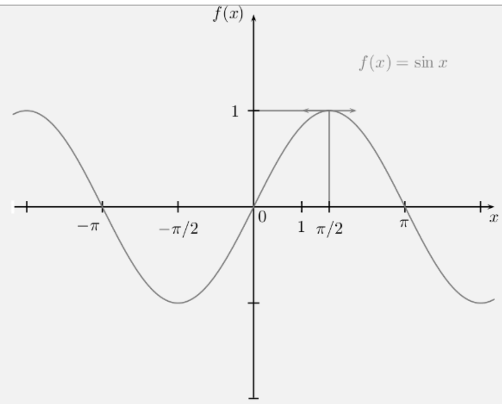
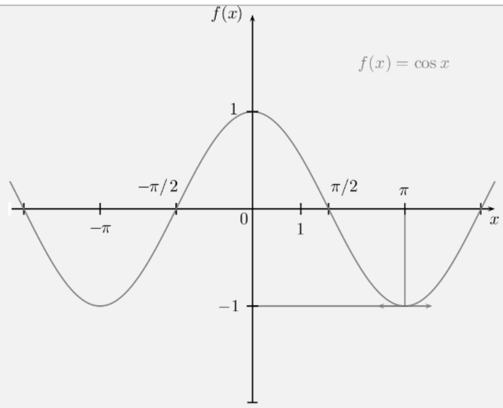
$$g > 0$$

$\boldsymbol{g > 1}$	$\boldsymbol{0 < g < 1}$
 Snijpunt $\boldsymbol{x}$-as**:** $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$ Domein: $\langle \mathbf{0}, \rightarrow \rangle$ Bereik: **alle reële getallen (ℝ)** Asymptoot: $\boldsymbol{x = 0}$	 **Snijpunt $\boldsymbol{x}$-as**: $(1,0)$ **Domein:** $\langle 0, \rightarrow \rangle$ **Bereik:** alle reële getallen (ℝ) **Asymptoot:** $x = 0$

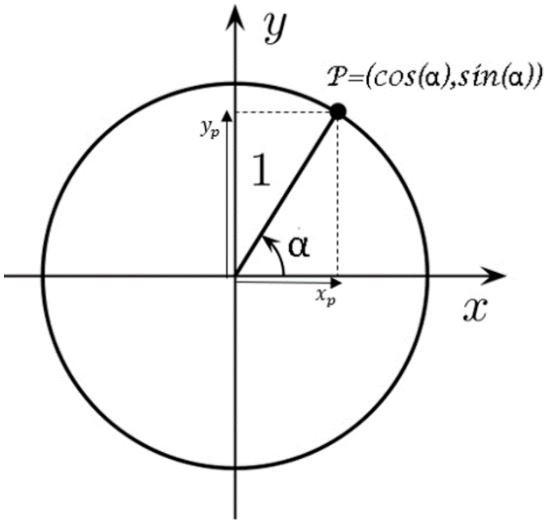
Zoals je in bovenstaande grafieken kunt zien hebben beide grafieken een verticale asymptoot van $x = 0$ aangezien je in een logaritmische functie nooit een getal kleiner dan, of gelijk aan nul in kunt vullen.

Goniometrische functies

Een **goniometrische functie**, ook wel trigonometrische functie genoemd, is de functie die een verband legt tussen hoeken. De meest bekende goniometrische functies zijn sinusoïden. Een sinusoïde is een grafiek die zich gedraagt als een sinus of cosinus. Hieronder zie je **standaardsinusoïden**:

$\boldsymbol{f(x) = \sin(x)}$	$\boldsymbol{f(x) = \cos(x)}$
 Beginpunt: $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ Puntsymmetrisch **in de oorsprong**	 **Beginpunt:** $(0,1)$ **Lijnsymmetrisch** in de y –as

Bij sinusoïden kijk je hoe een punt P over de eenheidscirkel heeft gelopen. In de grafieken staat $x = 0$ voor het punt $(1,0)$ op de eenheidscirkel en $x = \pi$ staat voor het punt $(-1,0)$ op de eenheidscirkel:



Zoals je kunt zien in de eenheidscirkel geldt voor de coördinaten van punt P:

$$y_p = \sin(\alpha)$$

$$x_p = \cos\,(\alpha)$$

$$y_p/x_p = \tan\,(\alpha)$$

Door de coördinaten van punt P te volgen krijg je uiteindelijk te zien hoe punt P over de cirkel loopt in de vorm van een sinusoïde.

In deze video's wordt de eenheidscirkel nog eens stap voor stap uitgelegd.

Algemene vorm goniometrische functies

De goniometrische functies hebben als algemene vorm:

$$f(x) = a + b * \sin\big(c(x-d)\big)$$

$$f(x) = a + b * \cos\big(c(x-d)\big)$$

Hierin is:

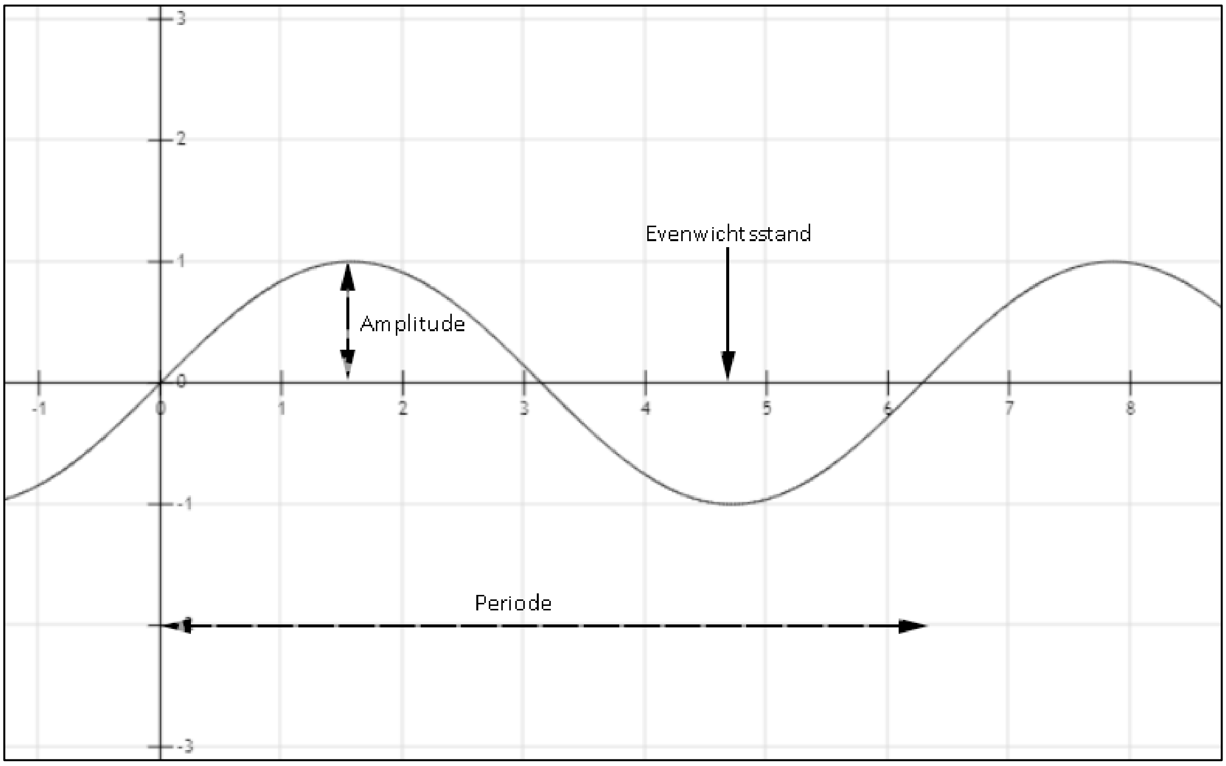
$$a = Evenwichtsstand$$

$$b = Amplitude$$

$$c = Snelheid = \ 2 * \frac{\pi}{periode}$$

$$d = Beginpunt\ waar\ de\ grafiek\ stijgend\ door\ de\ evenwichtsstand\ gaat$$

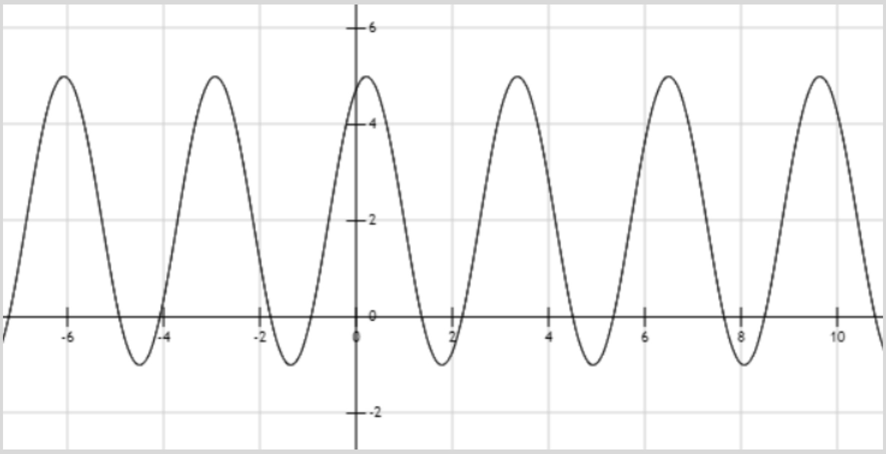
Zoals je kunt zien in de sinusoïdegrafieken is bij een standaard sinusoïde de evenwichtsstand gelijk aan 0, de amplitude gelijk aan 1 en de periode gelijk aan 2π $(= 6{,}283)$:



Waarbij het volgende geldt:

Evenwichtsstand	Lijn waar de sinusoïde omheen beweegt
Amplitude	De straal van de eenheidscirkel = afstand tussen maximum en de evenwichtsstand
Periode	Hoe lang het punt erover doet om rond de hele cirkel te gaan
Snelheid	Hoe snel het punt over de cirkel gaat: $2 * \frac{\pi}{periode}$

Let op! Als de amplitude, b, negatief is, dan is het beginpunt het punt waar de grafiek dalend door de evenwichtstand gaat.



$2 - 3 * sin(2(x-1))$ heeft een negatieve amplitude (-3), dus dan is het beginpunt, d, gelijk aan 1. Dit kun je zien in de formule en in de grafiek.

Er zijn ook goniometrische functies die niet standaard zijn. Dan moet je het bovenstaande uitrekenen door middel van formules (deze zou je ook kunnen toepassen op standaardgoniometrische functies):

	$\boldsymbol{f(x) = a + b * \sin(c(x-d))}$	$\boldsymbol{f(x) = a + b * \cos(c(x-d))}$
$\boldsymbol{a}$	$\frac{Min + Max}{2}$	$\frac{Max + Min}{2}$
$\boldsymbol{b}$	$Max - a$	$Max - a$
$\boldsymbol{c}$	$\frac{2\pi}{periode}$	$\frac{2\pi}{periode}$
$\boldsymbol{d}$	$x - d$ → het beginpunt bij $x = d$ $x + d$ → het beginpunt bij $x = -d$	$x - d$ → het beginpunt bij $x = d$ $x + d$ → het beginpunt bij $x = -d$

Wil je zien hoe je zo’n sinusoïde tekent? Kijk dan dit filmpje.

Voorbeeldopgave 12: Goniometrische functies

Gegeven is de volgende functie:

$$f(x) = 5 + 6 * \sin(3x + 6)$$

Bepaal de amplitude, evenwichtsstand, snelheid, periode en beginstand.

Uitwerking
Schrijf eerst de functie naar de algemene vorm $f(x) = a + b * \sin\big(c(x - d)\big)$:

$$f(x) = 5 + 6 * \sin(3x + 6)$$
$$= 5 + 6 * \sin(3(x + 2))$$

Waarin:

$a = evenwichtsstand = 5$

$b = amplitude = 6$

$c = snelheid = 3$

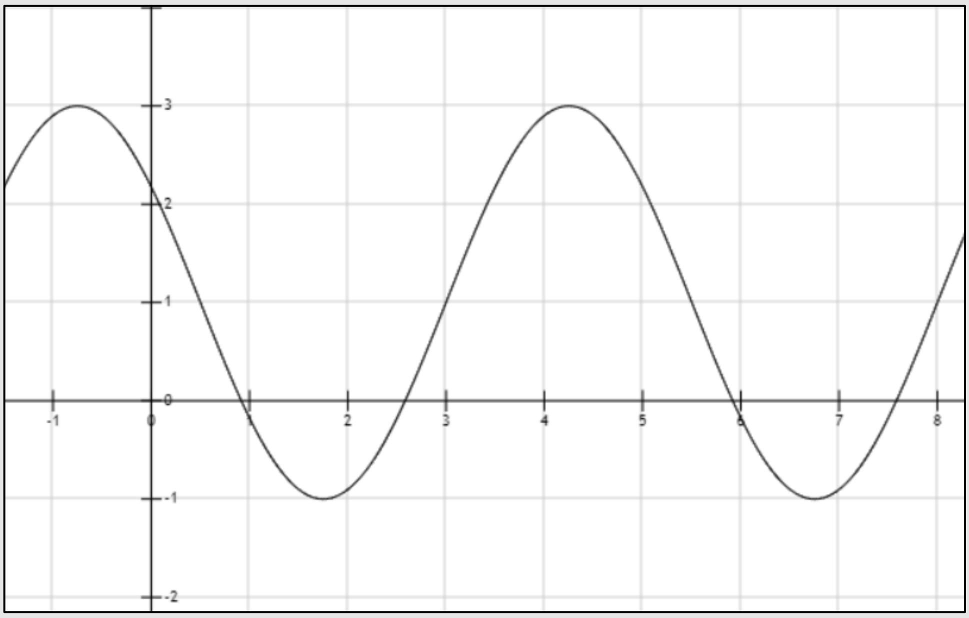
$d = beginpunt = -2$

De periode kan vervolgens berekend worden met de volgende formule:

$$c = \frac{2\pi}{periode} \quad \rightarrow$$
$$periode = \frac{2\pi}{c} = \frac{2\pi}{3}$$

Voorbeeldopgave 13: Sinusoïde

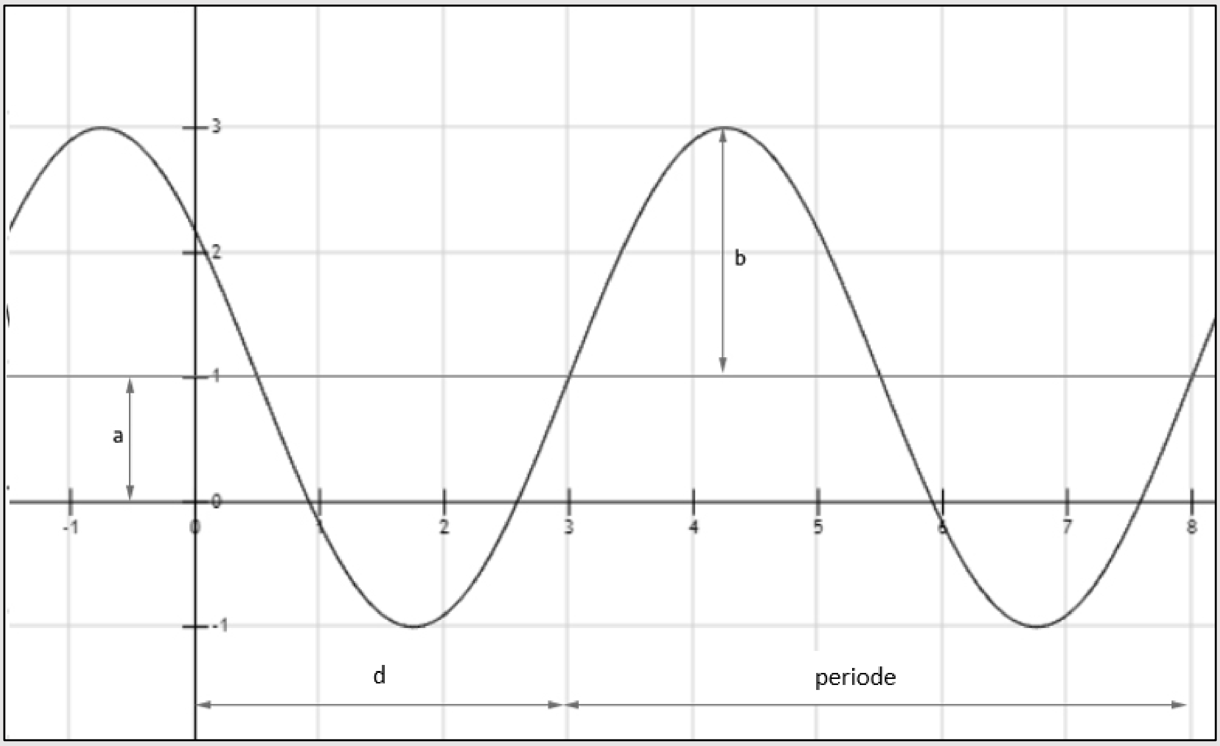
a. Bepaal de functie van de volgende sinusoïde:



b. Bepaal hoe hoog de trilling is bij $x = 5{,}5$.

Uitwerking

a.



Zoals je kunt aflezen uit de grafiek is de evenwichtsstand rond het punt $a = 1$. De amplitude, $b = 2$. De tijd voor één golf, oftewel de periode $= 5$. Dit betekent dus dat $c = \frac{2\pi}{periode} = \frac{2\pi}{5}$. Verder is de horizontale verplaatsing t.o.v de horizon $d = 3$. d is het punt waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat. Dit invullen in de formule:

$$f(x) = a + b * \sin\,(c(x - d))$$

Geeft:

$$f(x) = 1 + 2 * \sin\,(\frac{2\pi}{5}(x - 3))$$

b. De hoogte van de trilling bij $x = 5{,}5$ kun je bepalen door $x = 5{,}5$ in de formule in te vullen:

$$f(x) = 1 + 2 * \sin\,(\frac{2\pi}{5}(5{,}5 - 3))$$

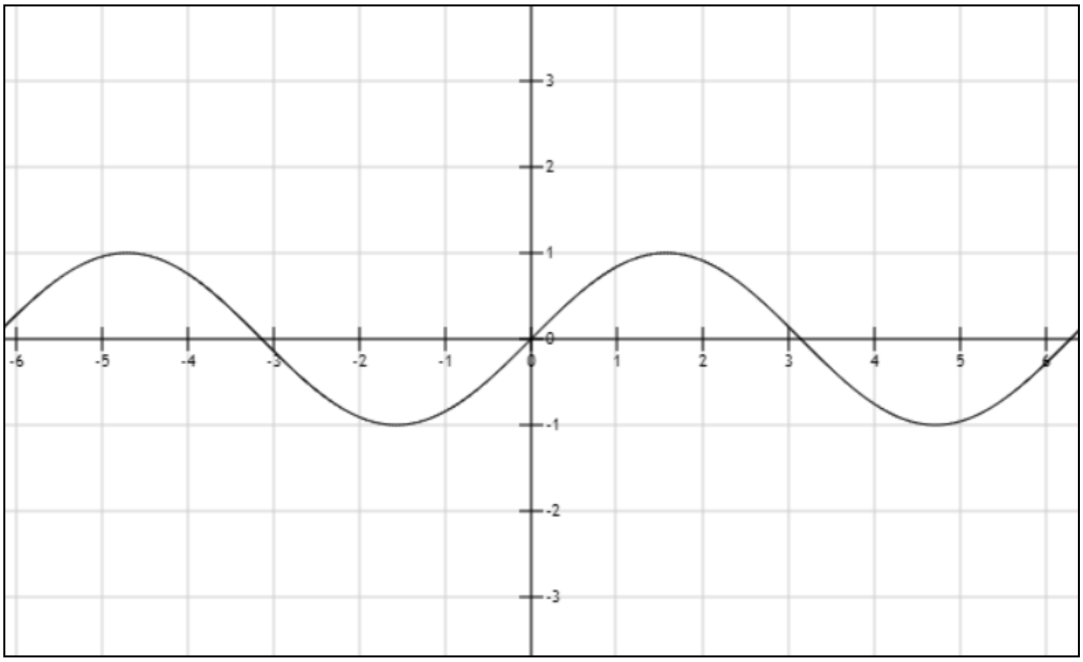
$$f(x) = 1 + 2 * \sin\,(\frac{2\pi}{5} * 2{,}5)$$

$$f(x) = 1 + 2 * \sin(\pi) = 1 + 2 * 0 = 1$$

Als je dit controleert in de grafiek zie je dat het klopt!

Grafiekveranderingen

We gaan even kijken wat er met een standaardsinusgrafiek gebeurt als je de evenwichtsstand, amplitude, periode en beginstand verandert. We beginnen met een standaardsinusoïde $sin(x)$, met als grafiek:

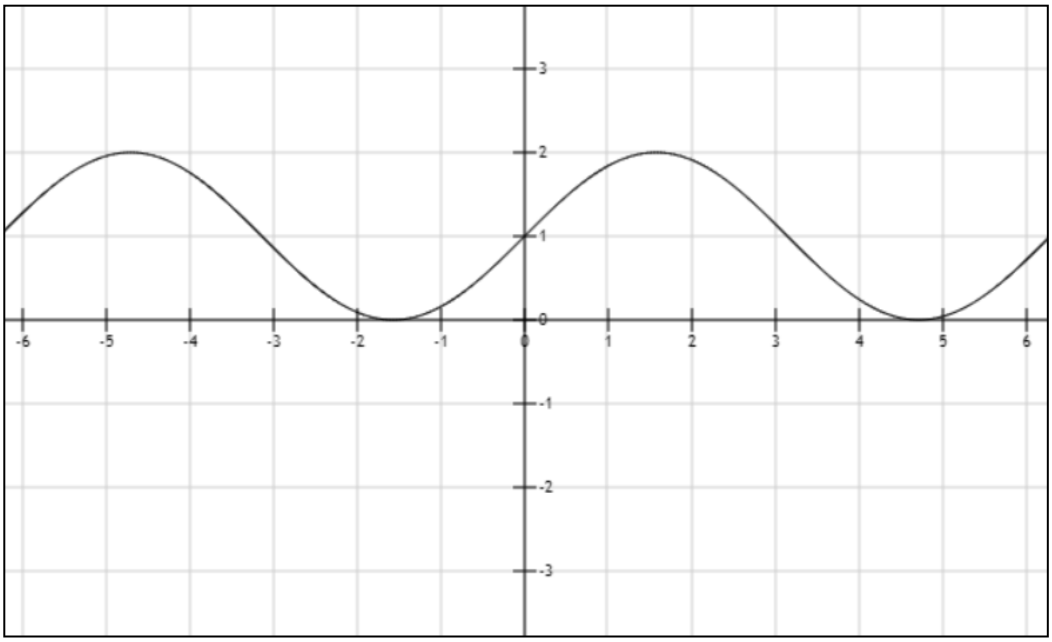


Evenwichtsstand

We gaan eerst de evenwichtsstand veranderen naar de horizontale lijn $y = 1$ door een verticale verschuiving toe te passen. De nieuwe formule wordt dan:

$$f(x) = 1 + \sin\,(x)$$

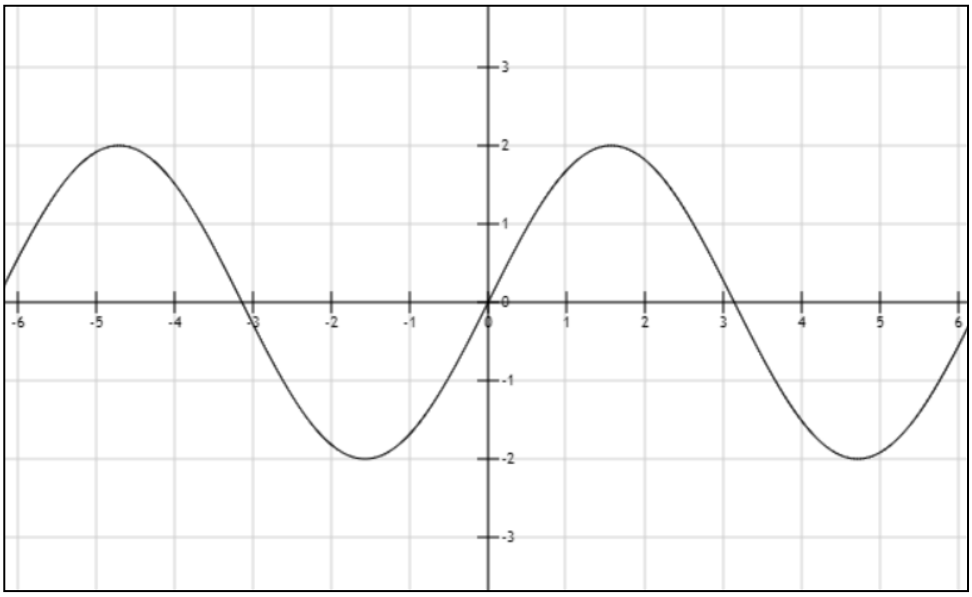
Met bijbehorende grafiek:



Amplitude
Als we de standaardsinusoïde $sin(x)$ vermenigvuldigen t.o.v de x-as met factor 2, krijgen we:

$$f(x) = 2 * \sin(x)$$

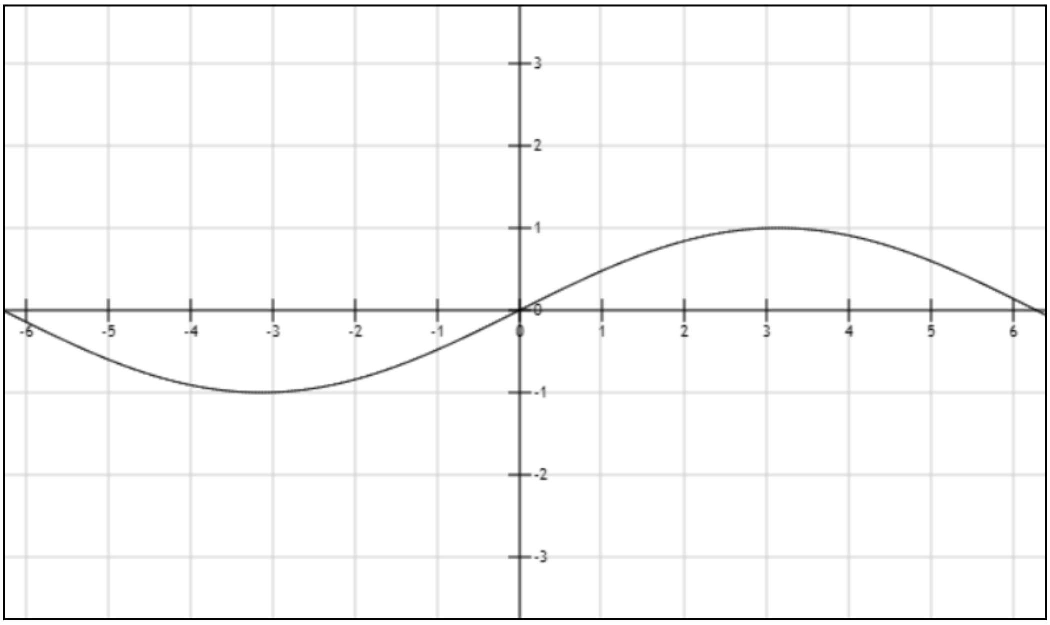
Met bijbehorende grafiek:



Periode
Als we de standaardsinusoïde $sin(x)$ vermenigvuldigen t.o.v de y-as met factor 2, krijgen we:

$$f(x) = \sin(\frac{1}{2} * x)$$

Met bijbehorende grafiek:

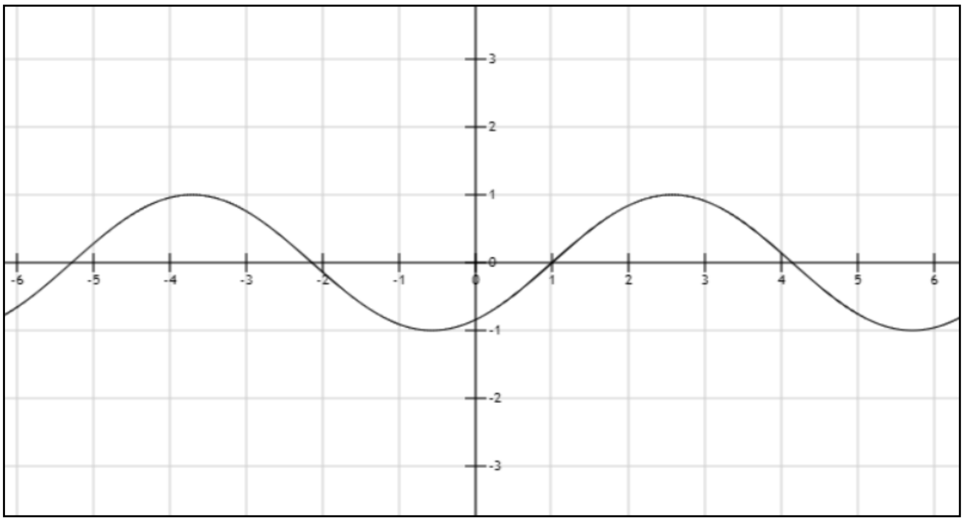


Translatie

Als we de standaardsinusoïde $sin(x)$ 1 naar rechts verschuiven krijgen we:

$$f(x) = \sin(x - 1)$$

Met bijbehorende grafiek:



Evenwichtsstand + amplitude + periode + beginpunt

Als we alle vorige specificaties aan de sinusoïde toevoegen krijgen we:

1. Evenwichtsstand veranderen naar 1:

$$f(x) = 1 + \sin(x)$$

2. Vermenigvuldigen t.o.v de x-as met factor 2:

$$f(x) = 2(1 + \sin(x)) = 2 + 2\sin(x)$$

3. Vermenigvuldigen t.o.v de y-as met factor 2:

$$f(x) = 2 + 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

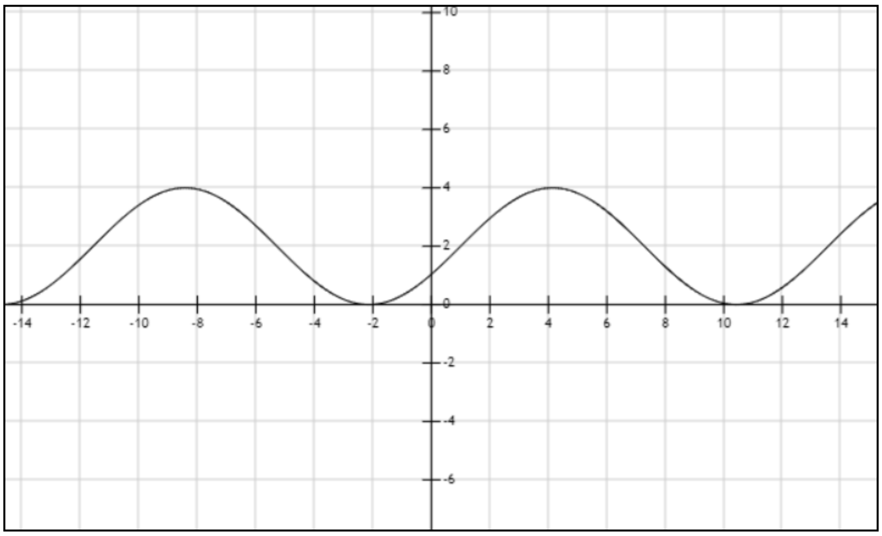
4. Beginpunt veranderen naar 1 (i.p.v 0). Verschuiving van 1 naar rechts:

$$f(x) = 2 + 2\sin\left(\frac{1}{2}(x-1)\right)$$

We krijgen dan de formule:

$$f(x) = 2 + 2 * \sin\left(\frac{1}{2}(x-1)\right)$$

Met bijbehorende grafiek:

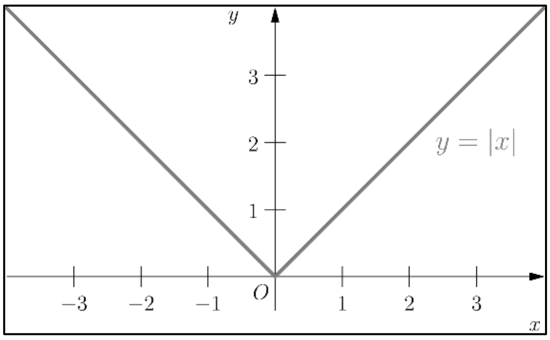


De absolute waardefunctie

Soms wil je in de wiskunde gewoon iets dat alleen maar positief is. Daarvoor is een aparte notatie verzonnen:

$$|\boldsymbol{x}|$$

Deze twee strepen maken elk negatief getal positief. Dit wordt ook wel de **absolute waarde** of de **modulus** genoemd. Het bereik van de absolute waarde is dus altijd $[0, \rightarrow\rangle$. Je kunt de absolute waarde zien als de afstand langs de $x-as$ tot de oorsprong. Dit is natuurlijk hetzelfde voor zowel -3 als 3:



Video WisBV-B2-4

Voor de modulus geldt dus:

$$|A| = B \text{ met } B \geq 0 \text{ geeft } A = B \text{ of } A = -B$$

$$|A| = B \text{ met } B < 0 \text{ geeft geen oplossing}$$

Als je deze QR-code scant zie je hoe je zelf zo'n grafiek maakt!

Voorbeeldopgave 14: Modulus

Gegeven is de volgende functie:

$$|x^2 - 20| = 4$$

Bepaal de waarde van x.

Uitwerking
Als je de modulus strepen weghaalt, krijg je:

$$x^2 - 20 = 4 \quad of \quad x^2 - 20 = -4$$

$$x^2 = 24 \quad of \quad x^2 = 16$$

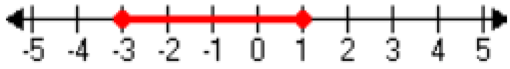
$$x = \sqrt{24} \; of \; x = \sqrt{16}$$

$$x = \sqrt{4} * \sqrt{6} \; of \; x = \sqrt{16}$$

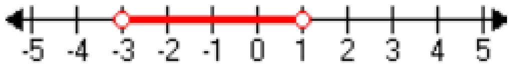
$$x = 2\sqrt{6} \quad of \; x = -2\sqrt{6} \; of \quad x = 4 \quad of \; x = -4$$

Oefenopgaven Domein B2

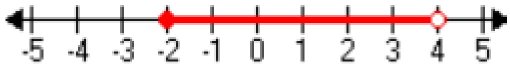
Vraag 1
Schrijf het interval op van de volgende getallenlijn:



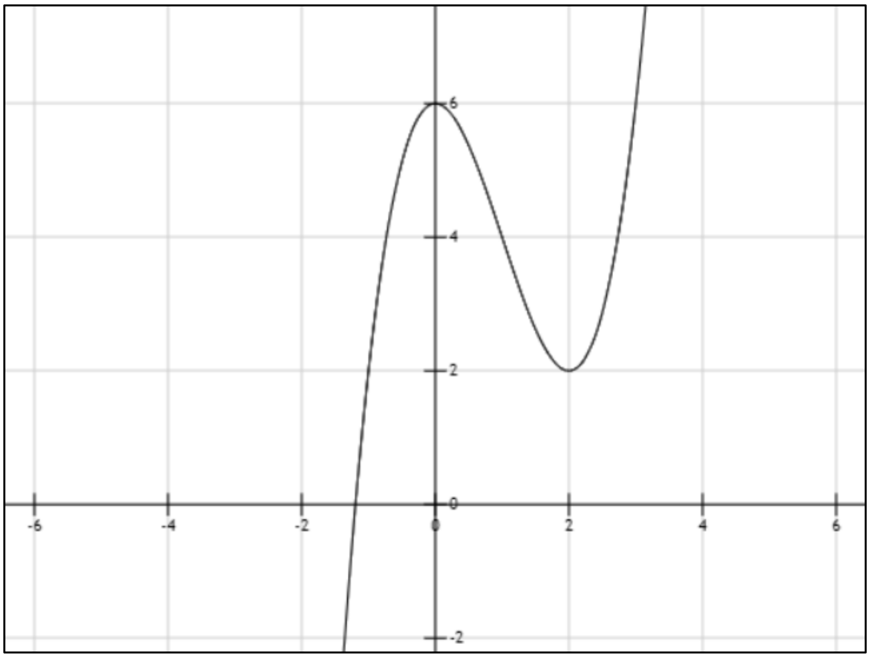
Vraag 2
Schrijf het interval op van de volgende getallenlijn:



Vraag 3
Schrijf het interval op van de volgende getallenlijn:



Vraag 4
Gegeven is de volgende grafiek:

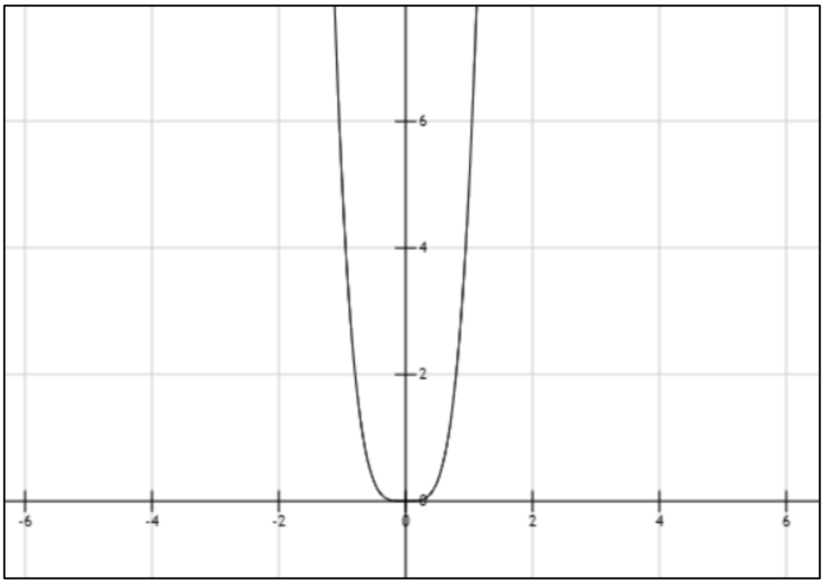


Met formule:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$$

a. Wat is het differentiequotiënt op het interval $[0,2]$?
b. Wat is het differentiequotiënt op het interval $[-1,2]$?

Vraag 5
Gegeven is de volgende grafiek:



Met formule:

$$f(x) = 0{,}5x^4$$

Wat is het differentiequotiënt op het interval $[0{,}2]$?

Vraag 6
De helling van de grafiek van de functie $f(x) = x\,sin(x)$ in het punt $(2\pi, 0)$ is te benaderen door een differentiequotiënt met $\Delta x = 0{,}001$ te berekenen.

Benader op deze manier de helling van de grafiek van f in dit punt. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Vraag 7
Combineer de volgende twee formules, zodat je de functie van y kunt uitdrukken in x. Bereken vervolgens de waarde van y voor $x = 2$.

$$y = 5x + 4z + 3 - 7x + 4$$

$$z = x - 2$$

Vraag 8
Bereken het domein en het bereik van de volgende functie:

$$f(x) = 4 + \sqrt{2 - 4x}$$

Vraag 9
Bereken de coördinaten van de top van de volgende parabool:

$$f(x) = x^2 + 3x + 4$$

Vraag 10
Gegeven is de volgende formule:

$$N = 4 * 1{,}6^t$$

Hierin is t de tijd in jaren. Bereken de verdubbelingstijd in maanden.

Vraag 11

Gegeven is de volgende functie:

$$f(x) = 4 + 2 * \sin(4x + 2)$$

Bepaal de amplitude, evenwichtsstand, snelheid, periode en beginstand.

Vraag 12
Gegeven is de volgende functie:

$$|x^2 - 2| = 2$$

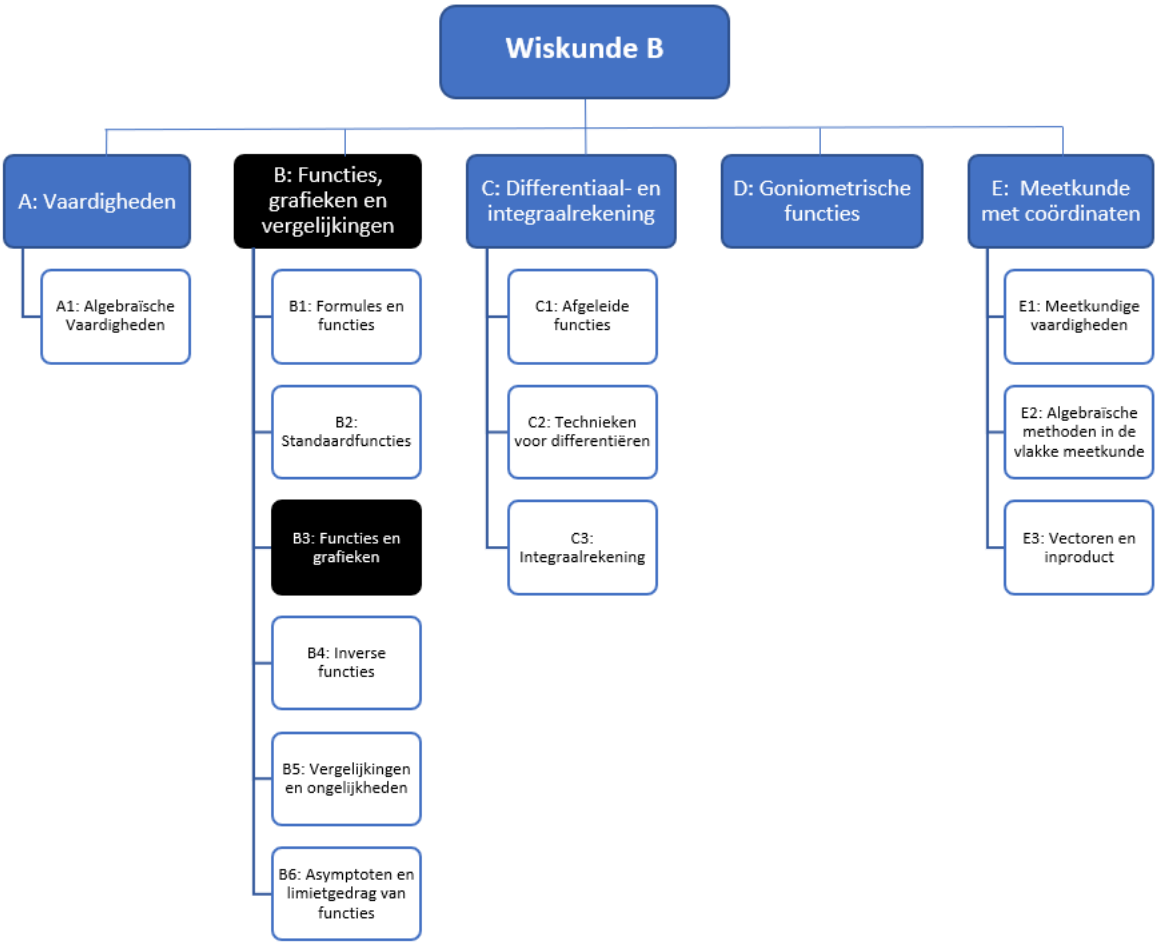
Bepaal de waarde van x.

Vraag 13
Een bacterie kan zichzelf verdubbelen in een maand. Er zijn 700 bacteriën aanwezig op het begin, $t = 0$. Stel de exponentiële formule op met t in maanden.

Vraag 14
Een vijver start met 1000 bacteriën. Deze verdubbelen zichzelf elke 3 uur. Stel een formule op voor de hoeveelheid bacteriën in deze vijver met de tijd in uren. Gebruik vervolgens deze formule om te voorspellen hoeveel bacteriën er zijn na 2 dagen.

Domein B3: Functies en grafieken

Vakoverzicht



Nu je alles hebt geleerd over standaardfuncties wordt het tijd om deze op te stellen, te bewerken en te combineren. Na dit hoofdstuk kun je op grafieken transformaties uitvoeren en daarvan een functievoorschrift opstellen. Succes ermee!

Transformaties

De basisfunctie $f(x)$ die je in de vorige hoofdstukken hebt geleerd kan natuurlijk ook op verschillende manieren **getransformeerd** worden tot een andere functie. We gaan je nu uitleggen op welke manieren dit kan en hoe je dit aan een grafiek kunt zien.

Er zijn drie soorten transformaties die je moet kennen voor je examen, waarvan de eerste twee het belangrijkste zijn:

- **Translaties**
- **Vermenigvuldiging**
- **Spiegelen**

We gaan ze hieronder alle drie even met je doornemen. Ben je er klaar voor? Daar gaan we!

Translaties

Door in de functie $f(x)$ een getal op te tellen of af te trekken verschuift de grafiek. Dit heet een **translatie.**

Een grafiek verschuift in de x-richting als er bij de x-coördinaat een getal wordt opgeteld/afgetrokken.

Een grafiek verschuift in de y-richting als bij de functie een getal wordt opgeteld/afgetrokken.

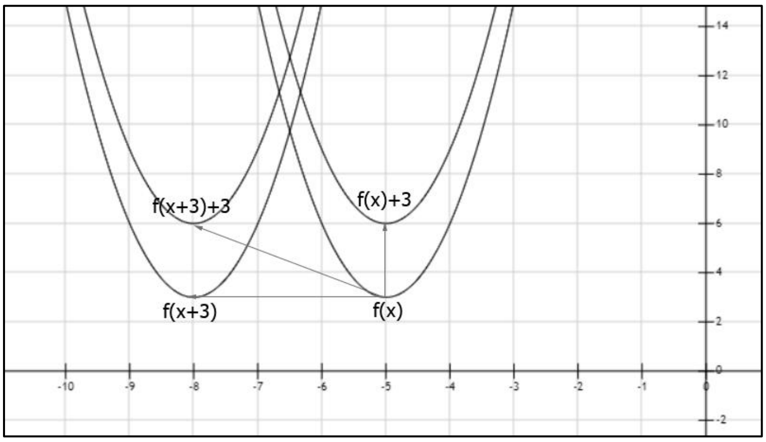
richting	soort translatie	verschuiving	formule
$\boldsymbol{x}$-richting	horizontale translatie	schuift a naar rechts	$f(x-a)$
$\boldsymbol{y}$-richting	verticale translatie	Schuift b omhoog	$f(x)+b$
beide	horizontale + verticale translatie	schuift a naar rechts & b omhoog	$f(x-a)+b$

Stel $f(x)=2x^2+5$, na een translatie van a naar rechts krijg je dus $f(x)=2(x-a)^2+5$.
Stel $f(x)=2x^2+5$, na een translatie van b omhoog krijg je dus $f(x)=2(x)^2+5+b$.

Voor een translatie van -3 in de x-richting en een translatie van 3 in de y-richting krijg je dus bijvoorbeeld:

richting	soort translatie	verschuiving	formule
$\boldsymbol{x}$-richting	horizontale translatie	schuift 3 naar links	$f(x+3)$
$\boldsymbol{y}$-richting	verticale translatie	schuift 3 omhoog	$f(x)+3$
beide	horizontale + verticale translatie	schuift 3 naar links en 3 omhoog	$f(x+3)+3$

Er geldt dat voor $f(x+3)$ de grafiek naar links schuift en voor $f(x-3)$ de grafiek naar rechts schuift in de horizontale richting. Bij de y-as geldt dat bij $f(x)+3$ de grafiek naar boven schuift en bij $f(x)-3$ de grafiek naar beneden schuift.



Vermenigvuldiging

Voor een **vermenigvuldiging** moet je eerst ook weer uitgaan van de basisfunctie $f(x)$. Alleen deze keer vermenigvuldigen we de functie of de x-coördinaat:

Vermenigvuldigen t.o.v de $\boldsymbol{x}$-as	Afstand $\boldsymbol{a}$ keer zo groot tot de $\boldsymbol{x}$-as	$\boldsymbol{a * f(x)}$
Vermenigvuldigen t.o.v de $\boldsymbol{y}$-as	Afstand $1/a$ keer zo groot tot de y-as	$f(a * x)$

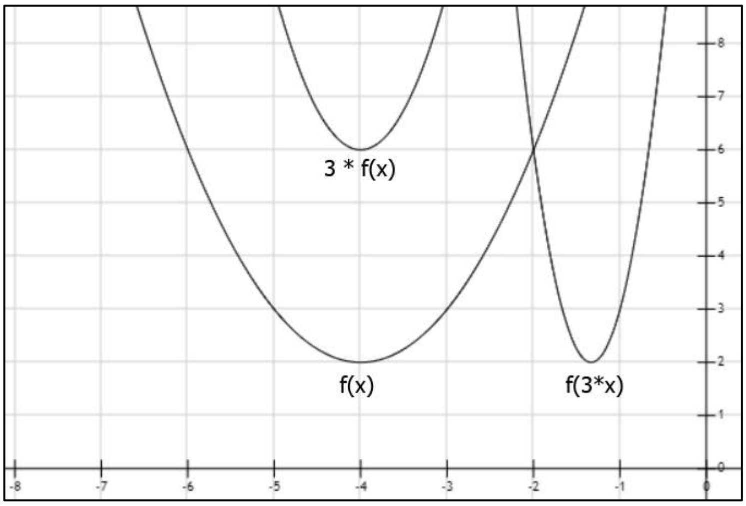
Stel $f(x) = 2x^2 + 5$, na een vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met a krijg je dus:

$$f(x) = a * (2x^2 + 5) = 2ax^2 + 5a$$

Stel $f(x) = 2x^2 + 5$, na een vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met a krijg je dus:

$$f(x) = 2(ax)^2 + 5 = 2a^2x^2 + 5$$

Als je de functie dus vermenigvuldigt met bijvoorbeeld 3, dan krijg je $3 * f(x)$ en zie je dat de afstand t.o.v de x-as drie keer zo groot wordt. Daarentegen, als je de x –coördinaat vermenigvuldigt met 3 zie je dat de functie $1/3$ keer zo groot wordt ten opzichte van de y-as:



Het is wel belangrijk om te kijken of je eerst wilt vermenigvuldigen of begint met translatie! Dit bepaalt namelijk hoe je grafiek eruit komt te zien.

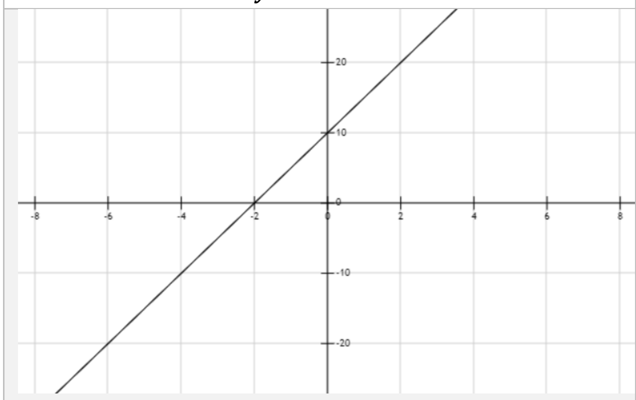
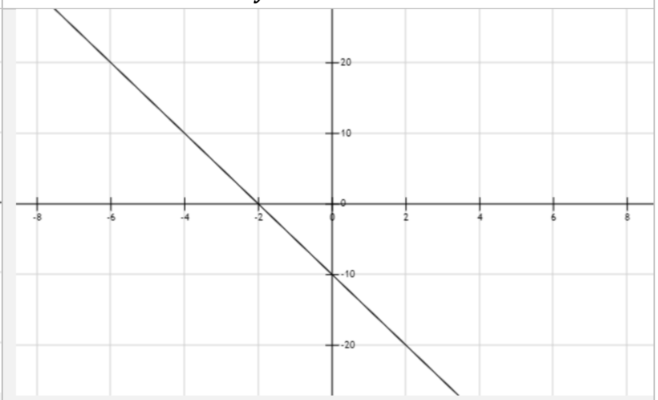
Translatie én vermenigvuldigen worden in deze video nogmaals voor je uitgelegd.

Spiegelen

Als laatste kun je een grafiek ook spiegelen. Dit is de makkelijkste transformatie van allemaal. Dit kan op twee manieren:

Spiegelen in de x –as

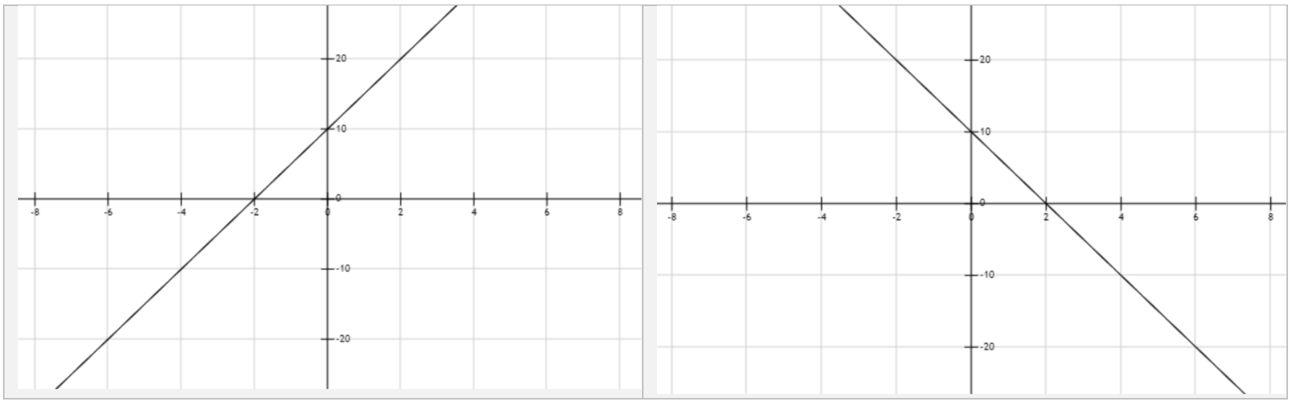
De hele grafiek klapt dan om de x-as. Elke y krijgt dus het tegengestelde teken. Dit kun je dus doen door een minteken voor de hele formule te zetten. Dit is dus hetzelfde als vermenigvuldigen met -1 t.o.v de x-as:

$\boldsymbol{y = 5x + 10}$	$\boldsymbol{y = -5x - 10}$
	

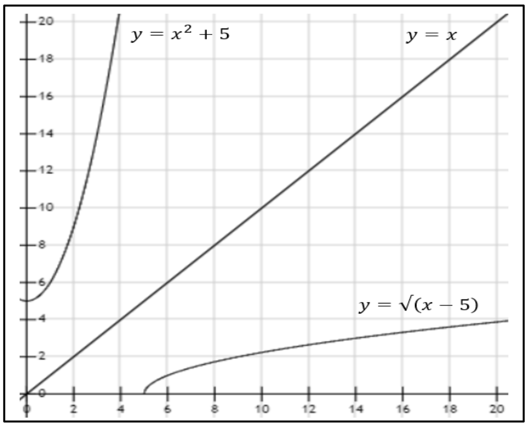
Spiegelen in de y –as

De hele grafiek klapt dan om de y-as. Elke x krijgt dus het tegenstelde teken. Dit kun je dus doen door een minteken voor elke x te zetten. Dit is dus hetzelfde als vermenigvuldigen met -1 t.o.v de y-as:

$\boldsymbol{y = 5x + 10}$	$\boldsymbol{y = -5x + 10}$



Spiegelen in de lijn $y = x$
Als je spiegelt met de lijn $y = x$, dan verwissel je x en y:



Zo krijg je bijvoorbeeld als je de volgende formule spiegelt om de lijn $y = x$,:

$$y = x^2 + 5$$

x en y wisselen:

$$x = y^2 + 5$$

Omschrijven:

$$y^2 = x - 5$$

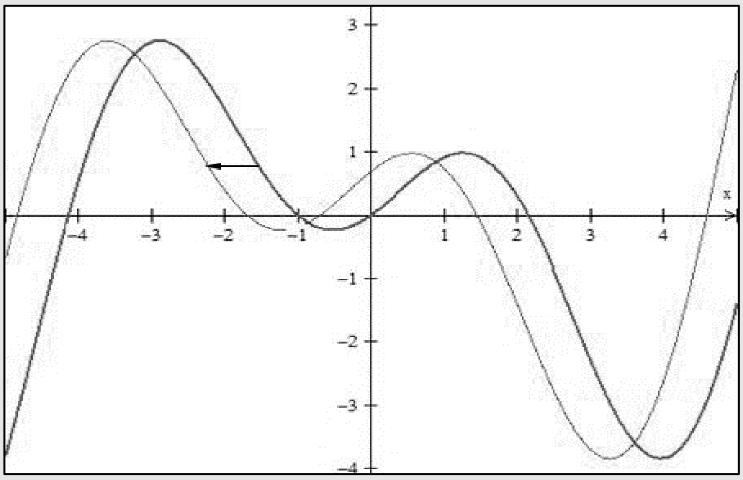
$$y = \sqrt{x - 5}$$

Voorbeeldopgave 1: Translatie

Gegeven is de volgende functie:

$$f(x) = x * \sin(x + 1)$$

Met bijbehorende grafiek (de dikke lijn):



Geef de formule voor de functie als de grafiek $0{,}7$ naar links schuift (de dunne lijn).

Uitwerking

Dit is dus een horizontale translatie naar links. De functie $f(x)$ verandert dus naar:

$$f(x) \to f(x + 0{,}7)$$

Dit invullen in de formule geeft:

$$f(x) = (x + 0{,}7) * \sin(x + 1{,}7)$$

Eerste- en tweedegraadsfuncties

Eerstegraadsfuncties

In het algemeen wordt de standaardvorm voor een eerstegraadsvergelijking gegeven door:

$$f(x) = ax + b$$

$$a \neq 0$$

Waarin:

$a = richtings\text{coëfficiënt}$
$b = snijpunt\ met\ de\ y - as$

Voor het snijpunt met de y-as neem je een waarde van $x\ = 0$. Daardoor is b hetzelfde als het snijpunt met de y-as. Om het snijpunt met de x-as te bereken moet je y dus gelijk aan nul stellen. Dit geeft:

$$0 = ax + b$$

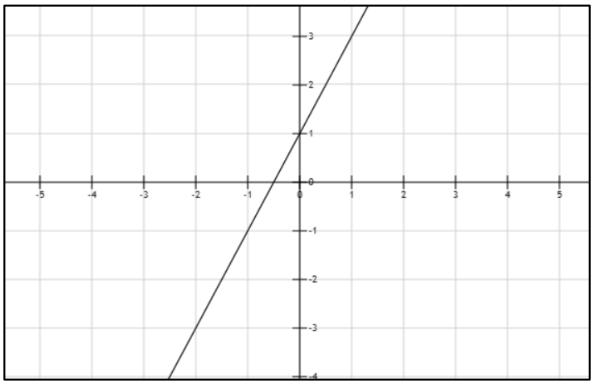
$$x = -\frac{b}{a}$$

Dus voor deze x heb je het snijpunt met de y-as berekend.

Er zijn meerdere manieren om een eerstegraadsfunctie op te schrijven:

	Algemene functie	**Voorbeeld**
$\boldsymbol{y}$ uitgedrukt in $\boldsymbol{x}$	$y = ax + b$	$y = 3x - 2$
$\boldsymbol{x}$ uitgedrukt in $\boldsymbol{y}$	$x = \frac{y - b}{a}$	$x = \frac{y + 2}{3}$
de algemene vorm	$-ax + y = b$	$3x - y = 2$

De grafieken van eerstegraadsfuncties zijn altijd rechte lijnen.



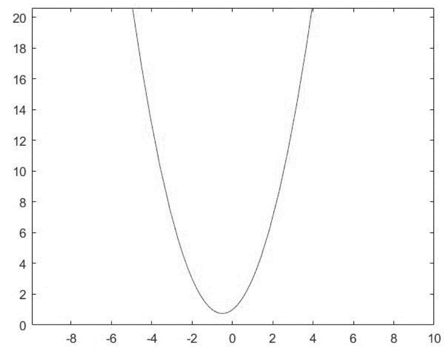
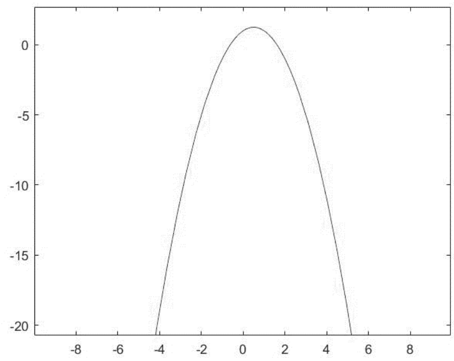
Tweedegraadsfuncties

De algemene gedaante van een tweedegraadsfunctie ziet er als volgt uit:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$a \neq 0$$

De grafieken van tweedegraadsfuncties zijn parabolen.

$\boldsymbol{a > 0}$	$\boldsymbol{a < 0}$
Dalparabool	**Bergparabool**
	

Weet je de ezelsbruggetjes nog bij de machtsfuncties? Als de a groter dan nul is, is het een positief getal, oftewel een positieve smiley ☺. En andersom, als de a negatief is, dan is de parabool ook negatief ☹.

Om de x −coördinaat van de top van een parabool te berekenen kun je gebruik maken van de volgende formule:

$$x_{top} = -\frac{b}{2a}$$

Vervolgens kun je deze x-coördinaat invullen in de tweedegraadsfunctie om y_{top} te berekenen:

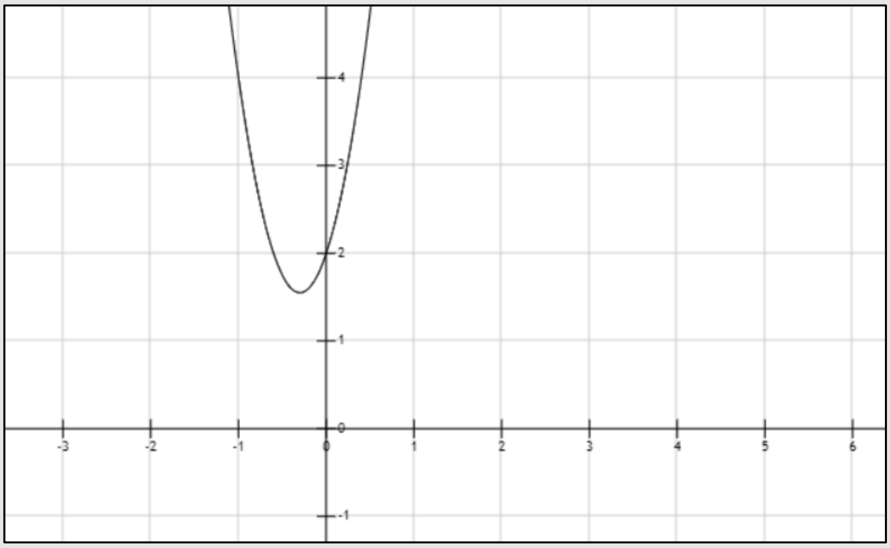
$$y_{top} = c - \frac{b^2}{4a}$$

Voorbeeldopgave 2: Top

Gegeven is de volgende functie:

$$f(x) = 5x^2 + 3x + 2$$

Bereken de exacte coördinaten van de top.



Uitwerking

$a > 0$ dus het is een dalparabool (dit kon je ook al zien in de grafiek).

$$x_{top} = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 * 5} = -\frac{3}{10}$$

$$y_{top} = c - \frac{b^2}{4a} = 2 - \frac{3^2}{4 * 5} = 2 - \frac{9}{20} = \frac{31}{20}$$

De coördinaten van de top zijn dus $(-\frac{3}{10}, \frac{31}{20})$.

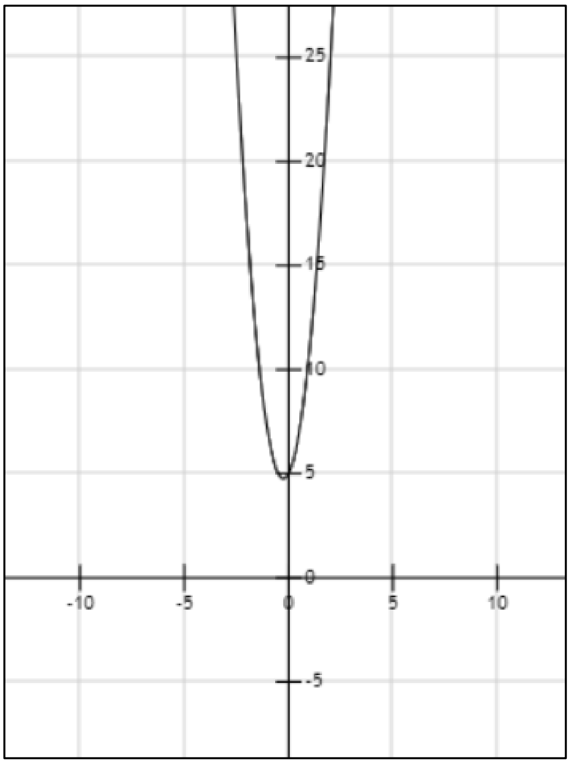
Zoals je ongeveer uit de grafiek kunt aflezen kun je zien dat dit klopt.

Oefenopgaven domein B3

Vraag 1
Gegeven is de volgende functie:

$$f(x) = 4x^2 + 2x + 5$$

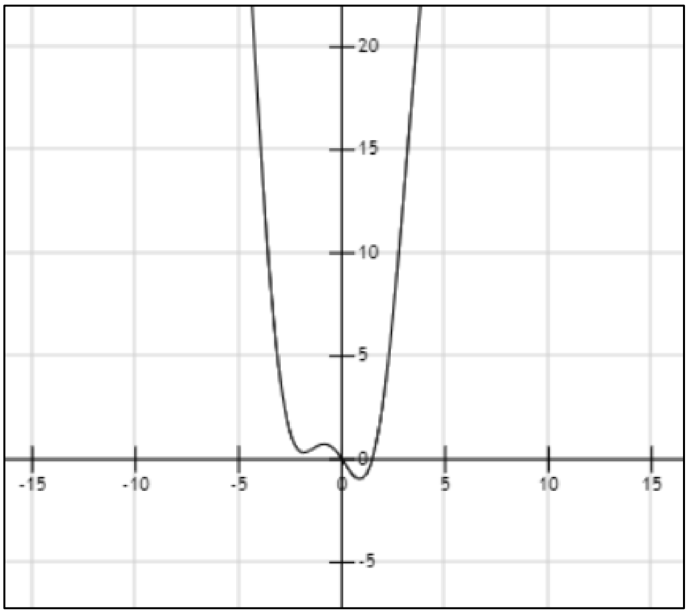
Vermenigvuldig deze functie t.o.v de y-as met 2. Wat wordt dan de nieuwe functie?



Vraag 2
Gegeven is de volgende functie:

$$f(x) = x^2 + 2x * \sin(x + 4)$$

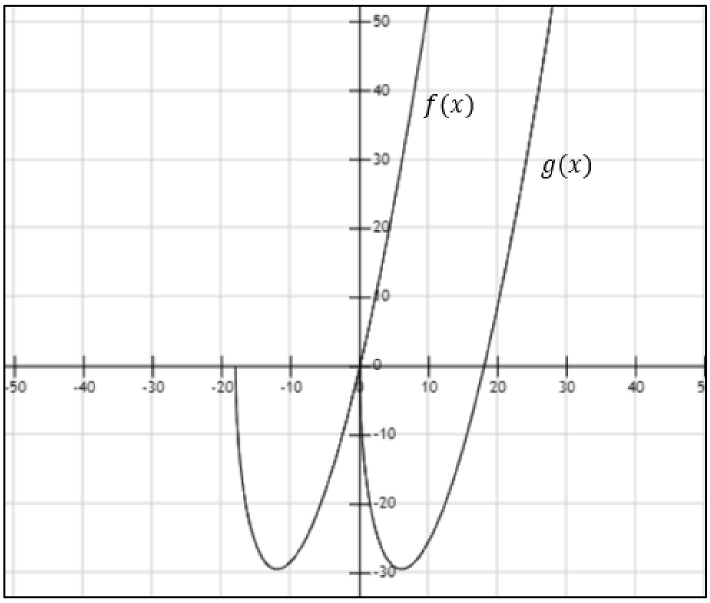
Met bijbehorende grafiek:



Geef de formule voor de functie als de grafiek 2 naar links schuift.

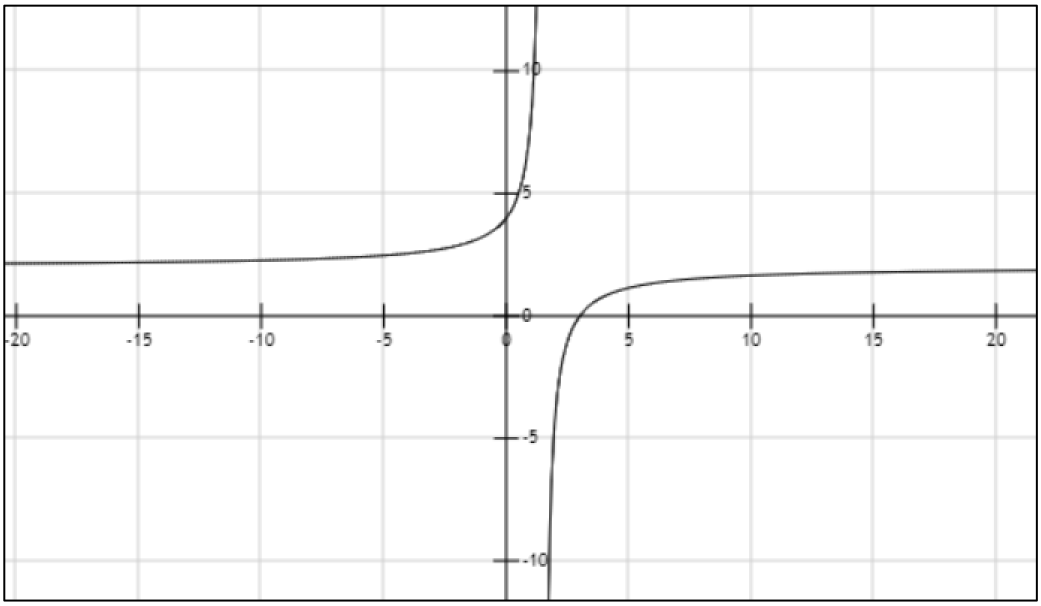
Vraag 3
De grafiek van $f(x) = x\sqrt{x+18}$ wordt 18 naar rechts verschoven. Zo ontstaat de grafiek van g met: $g(x) = x\sqrt{x} - 18\sqrt{x}$.

Toon dit aan.



Vraag 4
Gegeven is een functie:

$$f(x) = \frac{-6}{2x-3} + 2$$

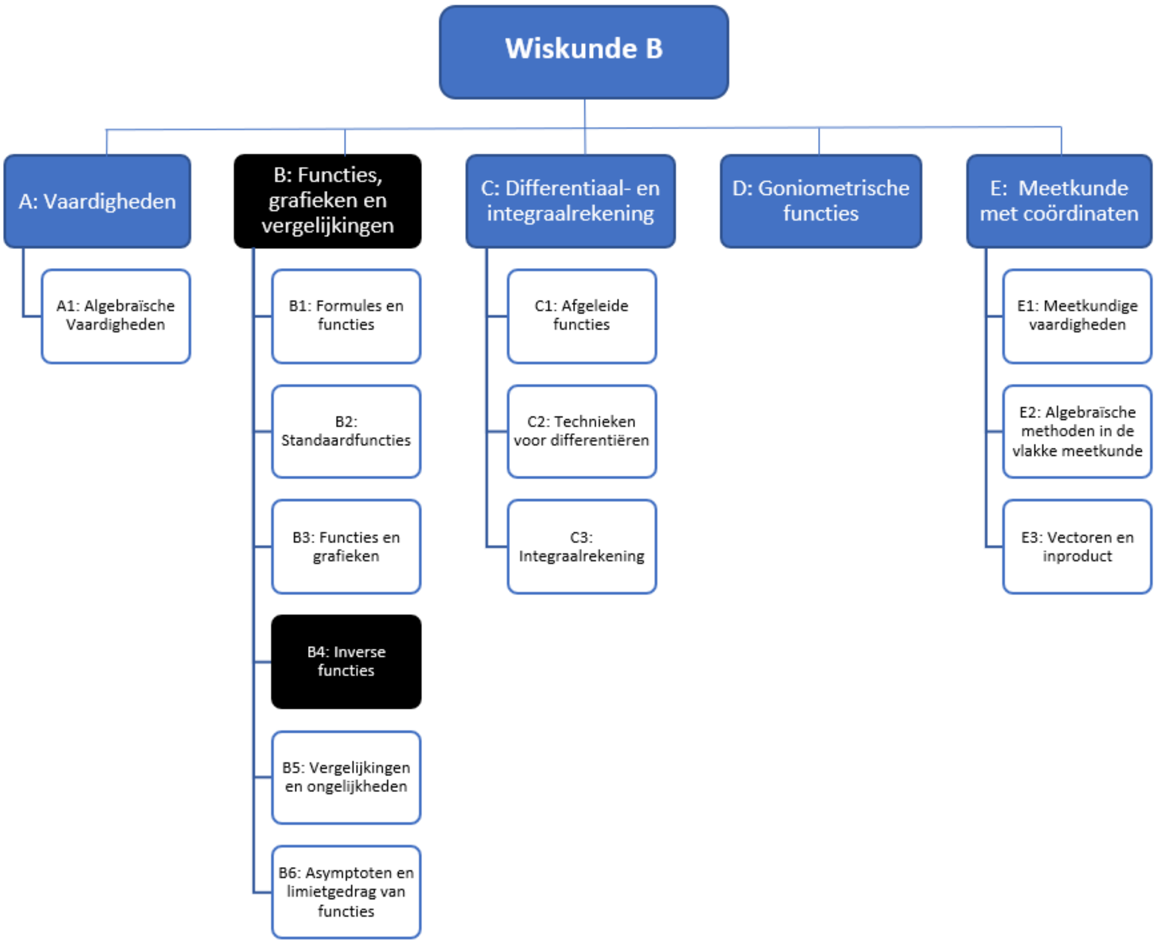


Er volgen twee transformaties: Een vermenigvuldiging met factor 2 t.o.v. de x-as, gevolgd door de translatie $(-2,8)$.

Toon aan dat de grafiek van g door de oorsprong gaat.

Domein B4: Inverse functies

Vakoverzicht

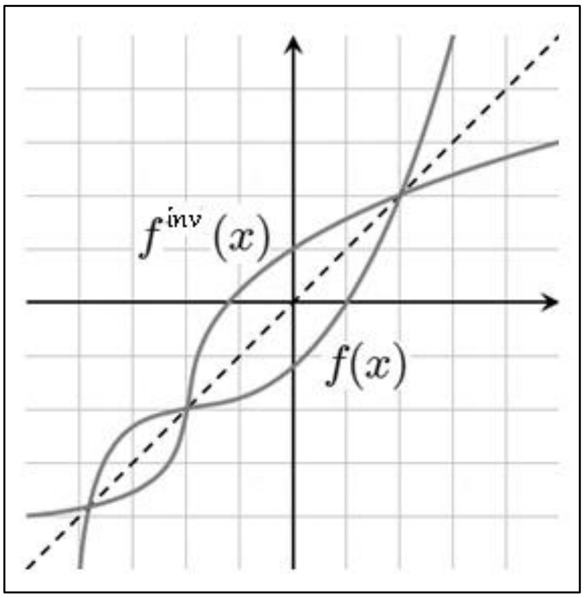


Nu je alles weet over functies en grafieken gaan we nog een stukje dieper in op de stof. Dit hoofdstuk gaan we het hebben over inverse functies. Na het lezen van de uitleg en wat oefenvragen gaat het voor jou een makkie zijn om een inverse op te stellen van vrijwel elke mogelijke functie!

Inverse functies

De **inverse van een functie** $f(x)$ wordt genoteerd als $f^{inv}(x)$ en is in feite gewoon het omgekeerde van die functie. Net als dat je de deur opent, de kamer binnenloopt, je schoenen uitdoet en daarna op de bank gaat zitten. De inverse hiervan is dat je van de bank afkomt, je schoenen weer aandoet, de kamer uitloopt en de deur achter je dicht doet. Een inverse lijkt op het eerste gezicht moeilijk, maar als je weet wat je moet doen is het zo gedaan!

Een inverse $f^{inv}(x)$ is dus eigenlijk het spiegelbeeld van de gewone functie $f(x)$. In een grafiek kun je dit zien door te kijken naar het spiegelbeeld van de lijn $y = x$:



Om de functie $f(x)$ om te schrijven naar de inverse functie $f^{inv}(x)$ heb je een aantal stappen nodig:

Stappen	Voorbeeld: $\boldsymbol{f(x) = 4x + 2}$
1. Schrijf $f(x)$ op als y als dit nog niet gedaan is.	$y = 4x + 2$
2. Verwissel de variabelen.	$x = 4y + 2$
3. Maak y vrij.	$y = \frac{x-2}{4}$
4. Vervang y door $f^{inv}(x)$.	$f^{inv}(x) = \frac{x-2}{4}$
5. Controleer je formule door een random getal in te vullen. **Als je het getal dat hieruit komt, invult bij $f^{inv}(x)$ moet je hetzelfde getal krijgen als het random getal dat je als eerst invulde.**	Stel: $x = 3$ $f(3) = 4 * 3 + 2 = 14$ Dit invullen in $f^{inv}(x)$ geeft: $f^{inv}(14) = \frac{14-2}{4} = 3$ Dit klopt dus.

Voor de functie $f(x) = 4x + 2$ was het makkelijk de inverse te vinden, maar soms krijg je ook moeilijkere functies. Daarom heb je hier een tabel met standaardoplossingen om makkelijk de inverse te kunnen opzoeken:

functie $\boldsymbol{f(x)}$	inverse $\boldsymbol{f^{inv}(x)}$
$\boldsymbol{ax}$	$\frac{1}{a}x$
$\boldsymbol{\frac{a}{x}}$	$\frac{a}{x}$
$\boldsymbol{x^2}$	$\sqrt{x}$
$\boldsymbol{x^a}$	$\sqrt[a]{x}$
$\boldsymbol{e^x}$	$ln(x)$
$\boldsymbol{a^x}$	${}^{a}\log(x)$

Laten we nog eens naar een voorbeeldopgave kijken!

Als je het nog steeds lastig vindt kan deze video vast nog wat helpen.

Voorbeeldopgave 1: Inverse functies

Geef de inverse van de volgende functie:

$$f(x) = \frac{2x+5}{3-x}$$

Uitwerking

Volg het stappenplan:

Stappen	$\boldsymbol{f(x) = \frac{2x+5}{3-x}}$
1. Schrijf $f(x)$ op als y als dit nog niet gedaan is.	$y = \frac{2x+5}{3-x}$
2. Verwissel de variabelen.	$x = \frac{2y+5}{3-y}$
3. Maak y vrij.	$x * (3-y) = 2y+5$ $3x * -xy = 2y+5$

	$-xy - 2y = -3x + 5$ $(-x - 2)y = -3x + 5$ $y = \dfrac{-3x + 5}{-x - 2}$
4. Vervang y door $f^{inv}(x)$.	$f^{inv}(x) = \dfrac{-3x + 5}{-x - 2}$
5. Controleer je formule door een random getal in te vullen. Het getal dat hieruit komt moet hetzelfde zijn bij $f(x)$ en bij $f^{inv}(x)$.	Stel: $x = 2$ $f(2) = \dfrac{2 * 2 + 5}{3 - 2} = 9$ Deze uitkomst invullen in $f^{inv}(x)$ geeft: $f^{inv}(9) = \dfrac{-3 * 9 + 5}{-9 - 2} = -\dfrac{22}{-11} = 2$ Dit klopt dus.

Oefenopgaven Domein B4

Vraag 1
Geef de inverse van de volgende functie:

$$f(x) = \frac{x}{6}$$

Vraag 2
Geef de inverse van de volgende functie:

$$f(x) = \frac{x - 1}{6x + 3}$$

Vraag 3
Geef de inverse van de volgende functie:

$$f(x) = 5 - \frac{6}{x + 2}$$

Vraag 4
Geef de inverse van de volgende functie:

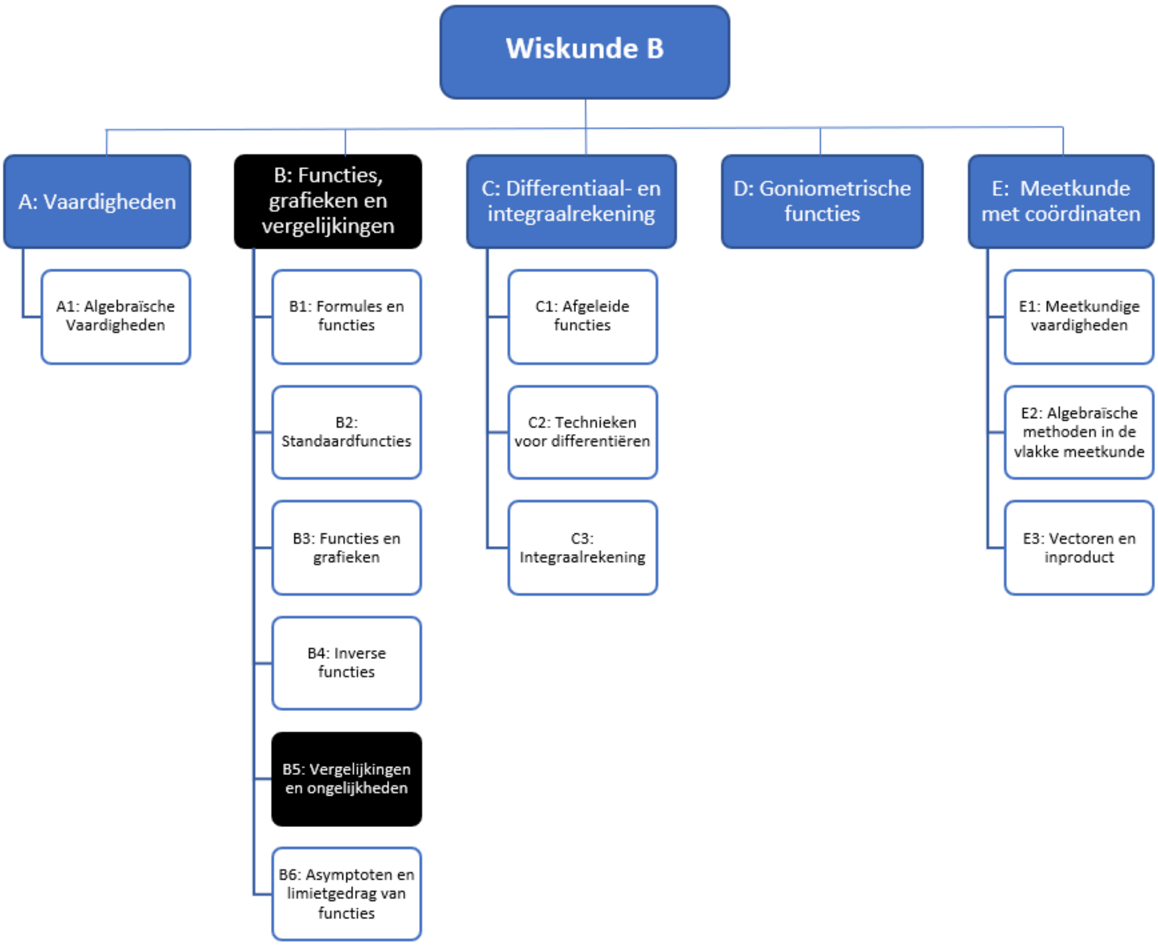
$$f(x) = \sqrt{x - 1}$$

Vraag 5
Geef de inverse van de volgende functie:

$$f(x) = 2^x$$

Domein B5: Vergelijkingen en ongelijkheden

Vakoverzicht



Nu je alles weet over functies ga je ook zien dat je sommige functies kunt combineren. Soms staan er in één grafiek meerdere functies en dan is het ook nuttig om te weten wanneer deze aan elkaar gelijk zijn, of wanneer de ene functie groter is dan de andere. Daar ga je in dit hoofdstuk alles over leren!

Vergelijkingen oplossen en herleiden

We beginnen bij stof die je al eerder hebt gezien, namelijk de eerste- en tweedegraadsvergelijkingen. Daarna gaan we langzaam aan dieper het hoofdstuk in. Hoppakee!

Lineaire vergelijking

De **eerstegraadsvergelijking** ken je nog wel, toch? Zo'n eerstegraadsvergelijking (of **lineaire vergelijking**) is een uitdrukking van de vorm:

$$\boldsymbol{ax + b = c}$$

In deze formule zijn a en b bekende getallen en $a \neq 0$.
Om x te berekenen moet je de vergelijking oplossen. Deze kan je eenvoudig oplossen:

$$ax + b = c$$

$$ax = c - b$$

$$\boldsymbol{x = \frac{c - b}{a}}$$

Kwadratische vergelijking

Een **tweedegraadsvergelijking of kwadratische vergelijking** heeft de volgende vorm:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

$$met\ a \neq 0$$

De oplossing van een tweedegraadsvergelijking kan worden berekend met de **abc-formule**:

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Zoals je al hebt geleerd bij de wortelberekeningen, bereken je de discriminant D als volgt:

$D = b^2 - 4ac > 0$	De vergelijking heeft twee oplossingen.
$D = b^2 - 4ac = 0$	De vergelijking heeft één oplossing.
$D = b^2 - 4ac < 0$	De vergelijking heeft geen (reële) oplossingen

Je kunt soms ook de vergelijking ontbinden in factoren. Dit heet de **product-som-methode**. Of de som-product-methode, zoals wij het omgedoopt hebben in domein A. Dit kun je doen met wat hoofdrekenen, of met een tabel. Net als bij het volgende voorbeeld:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + \quad)(x + \quad)$$

Som Product

Product	Som
$\mathbf{1}$ & $\mathbf{6}$	7
$\mathbf{2}$ & $\mathbf{3}$	$\mathbf{5}$
$\mathbf{-1}$ & $\mathbf{-6}$	-7
$\mathbf{-2}$ & $\mathbf{-3}$	-5

In de formule moet je dus twee getallen invullen die vermenigvuldigd 6 zijn *(= het product)* en bij elkaar opgeteld 5 *(= de som).* Dit is het geval bij 2 & 3.

Dit leidt uiteindelijk tot de volgende formule:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

Hoe je dan verder gaat, zullen we zien in de volgende voorbeeldopgave.

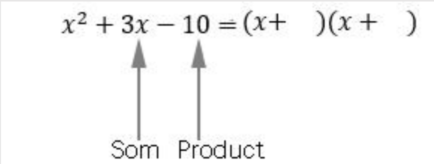
Voorbeeldopgave 1: Vergelijkingen oplossen

Bepaal x met behulp van de product-som-methode van de volgende vergelijking:

$$2x^2 + 6x - 20 = 0$$

Uitwerking

Vereenvoudig eerst de functie:



Product	Som
$\mathbf{1 \& -10}$	-9
$\mathbf{-1 \& 10}$	9
$\mathbf{2 \& -5}$	-3
$\mathbf{-2 \& 5}$	$\mathbf{3}$

Oftewel:

$$2x^2 + 6x - 20 = (x - 2)(x + 5)$$

Volgens de algemene regel:

$$x - 2 = 0 \quad of \quad x + 5 = 0$$

$$x = 2 \quad of \quad x = -5$$

Controleer door x in te vullen in de functie:

$$x = 2 \rightarrow 2 * 2^2 + 6 * 2 - 20 = 0 \quad KLOPT$$

$$x = -5 \rightarrow 2 * (-5)^2 + 6 * -5 - 20 = 0 \quad KLOPT$$

Oftewel:

$$x = 2 \quad of \quad x = -5$$

Hogeregraadsvergelijking

Als er een hogere macht dan een kwadraat in een vergelijking zit, wordt dit ook wel een **hogeregraadsvergelijking** genoemd. Ook deze zijn op te lossen zonder rekenmachine door gebruik te maken van de algemene regels in domein A!

Voorbeeldopgave 2: Hogeregraadsvergelijking

Bereken de waarde van x van de volgende functie:

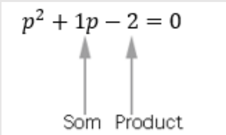
$$x^6 + x^3 - 2 = 0$$

Uitwerking

Substitueer (zie domein A1 voor meer uitleg over substitueren) de vergelijking eerst met $p = x^3$:

$$p^2 + p - 2 = 0$$

Ontbind de vergelijking nu in factoren:



Product	Som
$\mathbf{1\ \&-2}$	-1
$\mathbf{2\ \&\ -1}$	$\mathbf{1}$

$$(p+2)(p-1) = 0$$

Bereken p:

$$p = -2 \quad of \quad p = 1$$

Zet p weer om naar x:

$$x^3 = -2 \quad of \quad x^3 = 1$$

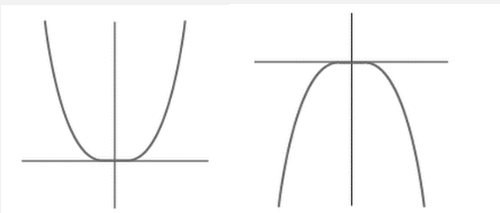
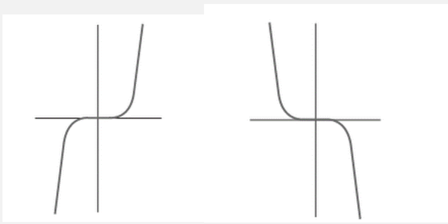
Bepaal x:

$$x^3 = 1 \rightarrow \ Voldoet$$

$$x^3 = -2 \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{-2} \quad of\ x = -\sqrt[3]{-2} \rightarrow Kan\ niet$$

Vergelijking met machtsfunctie

Zoals je hebt geleerd in Domein B2 hebben machtsfuncties altijd dezelfde soort grafiek. *Even* machtsfuncties hebben altijd een parabolische grafiek. *Oneven* machtsfuncties hebben altijd een grafiek in de vorm van een 'S-Vorm'.

Even machtsfuncties $x^n = a$	**Oneven machtsfunctie $x^n = a$**
Grafiek in de vorm van een parabool:  $\boldsymbol{a > 0}$ $\boldsymbol{a < 0}$	Grafiek in een s-vorm:  $\boldsymbol{a > 0}$ $\boldsymbol{a < 0}$
Voor $a > 0$ twee oplossingen: $\boldsymbol{x = \sqrt[n]{a}\ \ of\ \ x = -\sqrt[n]{a}}$ **Voor $a = 0$ één oplossing** $\boldsymbol{x = 0}$ **Voor $a < 0$ geen oplossing**	Voor $a \geq 0$ altijd één oplossing: $x = \sqrt[n]{a}$ Voor $a < 0$ geen oplossing

Vergelijking met twee functies

Soms heb je een vergelijking met meerdere functies: $f(x)$ en $g(x)$ worden hier vaak voor gebruikt. Als je het snijpunt wilt vinden tussen de grafiek van $f(x)$ en de grafiek van $g(x)$ kun je deze aan elkaar gelijkstellen:

$$f(x) = g(x)$$

Als deze grafieken met elkaar snijden, zul je hier één of meerdere x-coördinaten uit krijgen. Door dit x-coördinaat in te vullen in een van de functies kun je ook het y-coördinaat berekenen en zo weet je het punt waar de grafieken elkaar snijden.

Ongelijkheden

Ongelijkheid met twee functies

Je kunt ook een ongelijkheid hebben met twee functies. Dan wil je bijvoorbeeld weten wanneer de ene grafiek groter is dan de andere grafiek. Een ongelijkheid van de functie $f(x)$ en $g(x)$ kun je schrijven in de vorm:

$$f(x) \leq g(x)$$

Deze ongelijkheid kan je vinden door eerst het snijpunt te vinden van de grafieken en dan vervolgens de grafiek te schetsen om te zien wanneer $f(x)$ kleiner is dan $g(x)$.

Dit kan je algebraïsch oplossen, zie deze video voor meer uitleg! In de titel staat dat een HAVO filmpje is, maar het algebraïsch oplossen van een ongelijkheid is wel degelijk VWO stof!

Je kunt ongelijkheden ook oplossen met je grafische rekenmachine. Dit kun je doen door beide formules in te vullen en dan vervolgens te kijken welke wanneer groter is. Dit doe je als volgt:

Voorbeeldopgave 3: Ongelijkheden

Bepaal met je GR de waarde van x waarvoor $f(x) \leq g(x)$, met:

$$f(x) = 8x + 4$$

$$g(x) = 5x + 16$$

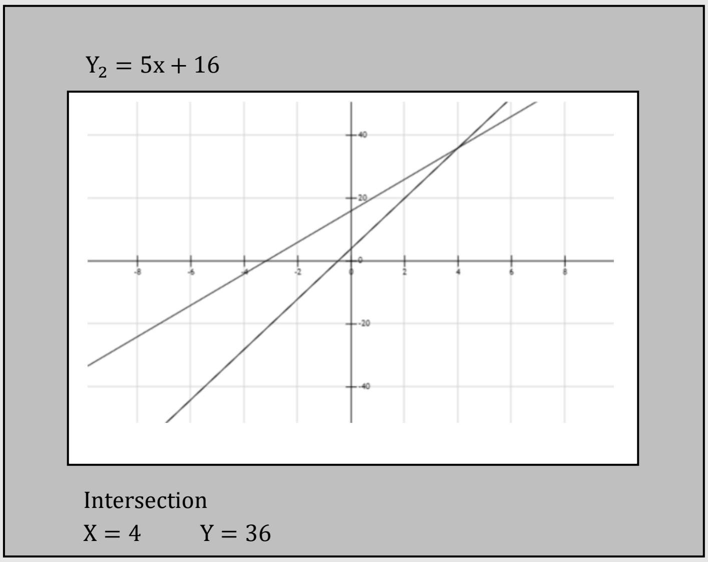
Uitwerking

PLOT

$y_1 = 8x + 4$

$y_2 = 5x + 16$

WINDOW $[-10{,}10]$ x $[-50{,}50]$
CALC *intersect* geeft $x = 4$
Conclusie: $x \leq 4$



Voorbeeldopgave 4: Ongelijkheden

Bepaal algebraïsch de waarde van x waarvoor $f(x) \leq g(x)$, met:

$$f(x) = 8x + 4$$

$$g(x) = 5x + 16$$

Uitwerking

Stel eerst de vergelijkingen $f(x)$ en $g(x)$ aan elkaar gelijk en bereken x:

$$f(x) = g(x)$$

$$8x + 4 = 5x + 16$$

$$8x = 5x + 12$$

$$x = 4$$

$x = 4$ is dus het snijpunt. Het is nu de vraag welke grafiek nou boven de ander uitkomt. Om hier achter te komen vul je een hogere x in de formules in:

$$x = 6 \rightarrow$$

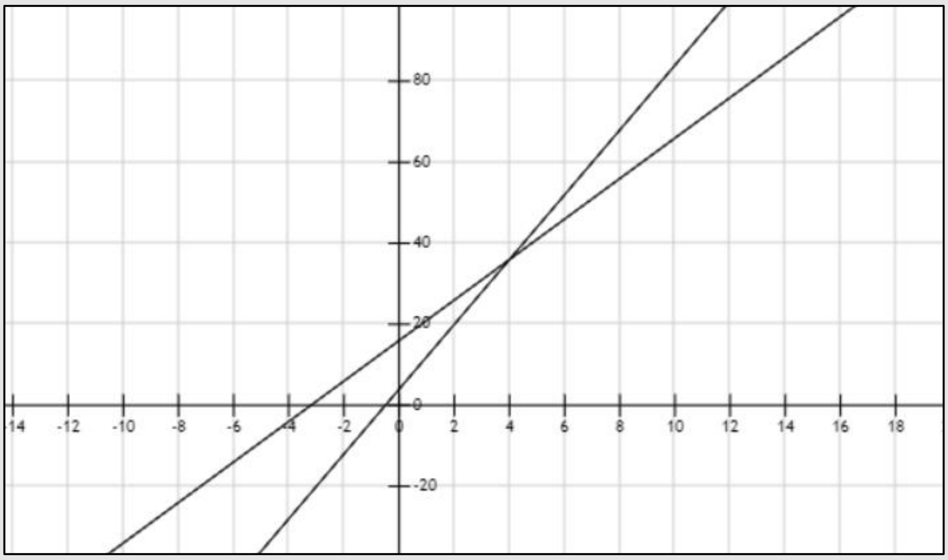
$$f(6) = 8 * 6 + 4 = 52, \quad g(6) = 5 * 6 + 16 = 46$$

Hierin zie je dat $f(x) \leq g(x)$ niet geldt en dat dus geldt $x \leq 4$

Dit kun je controleren door een random getal kleiner dan 4 in te vullen:

$$x = 2 \rightarrow \quad f(2) = 2 * 6 + 4 = 16, \quad g(2) = 5 * 2 + 16 = 36$$

Hierin zie je dat $f(x) \leq g(x)$ wel geldt en dat $x \leq 4$ is:



Oefenopgaven Domein B5

Vraag 1
Bepaal x met behulp van de product-som-methode van de volgende vergelijking:

$$x^2 + 3x - 40 = 0$$

Vraag 2
Bereken de waarde van x van de volgende vergelijking:

$$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$$

Vraag 3
Bepaal de waarde van x waarvoor $f(x) \leq g(x)$, met:

$$f(x) = 2x + 6$$

$$g(x) = 4x + 16$$

Vraag 4
Bepaal algebraïsch de waarde van x waarvoor $f(x) > g(x)$, met:

$$f(x) = -x + \frac{1}{2}$$

$$g(x) = \sqrt{-3x + 8\frac{1}{4}}$$

Vraag 5
Bepaal de waarde van x waarvoor $f(x) \leq g(x)$, met:

$$f(x) = 3x^2 + 4x$$

$$g(x) = -8x + 8$$

Vraag 6
De functie f is gegeven door:

$$f(x) = {}^{3}\log(4x + 3)$$

Bereken de coördinaten van de snijpunten met de x-as en de y-as.

Vraag 7
De functies f en g zijn gegeven door:

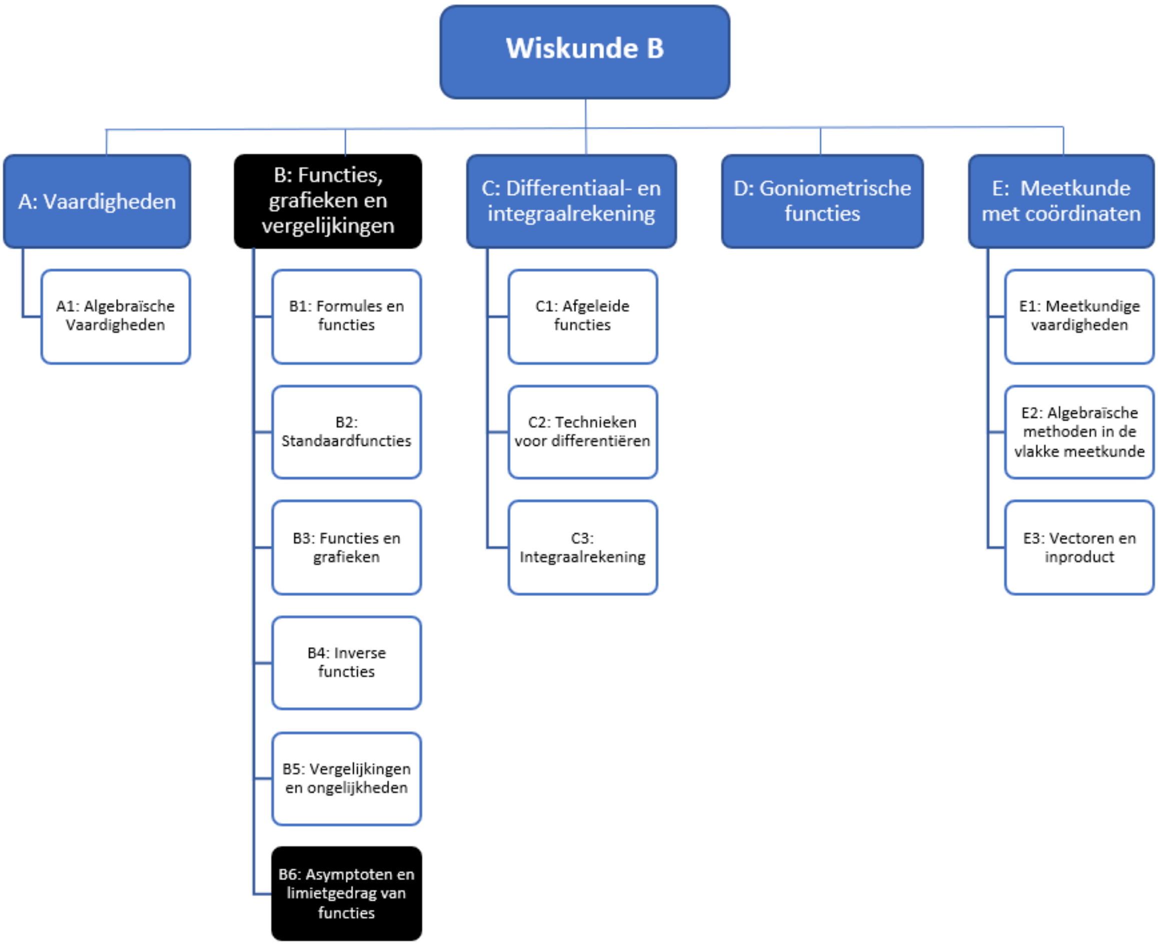
$$f(x) = (x + 2)\sqrt{x + 2}$$

$$g(x) = x(x + 2)$$

Bereken algebraïsch de coördinaten van het snijpunt.

Domein B6: Asymptoten en limietgedrag van functies

Vakoverzicht



We zijn alweer in het laatste subdomein van domein B belandt. Lekker bezig!! In dit hoofdstuk ga je bepalen wat het asymptotisch gedrag van een functie is en door middel van limietberekeningen ga je dit aantonen! Als dat niet als een feestje klinkt, weten wij het ook niet meer!

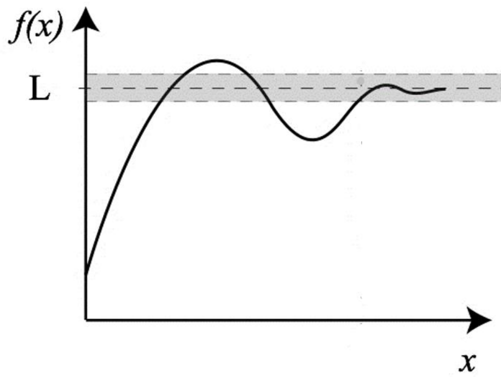
Zonder gekheid, het is belangrijk om asymptoten goed te begrijpen voor je examen. We gaan ook dit hoofdstuk dus stap voor stap met je doornemen.

Limietgedrag

In de wiskunde heet de waarde waar een functie uiteindelijk naartoe zal gaan een **limiet**. Een ander woord voor limiet is ook wel **grenswaarde**. Je noteert limieten als volgt:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

Hier is A dus de limiet van de functie $f(x)$ waar de functie steeds dichter bij A komt als de x nadert naar a. Bij een limiet kan het ook voorkomen dat x naar oneindig gaat. Dit klinkt allemaal heel moeilijk, maar als je de volgende grafiek ziet, wordt het vast duidelijker:



Zoals je kunt zien dempt deze grafiek steeds meer en uiteindelijk zal deze eindigen bij de L. Hierin wordt L dus ook wel de limiet genoemd.

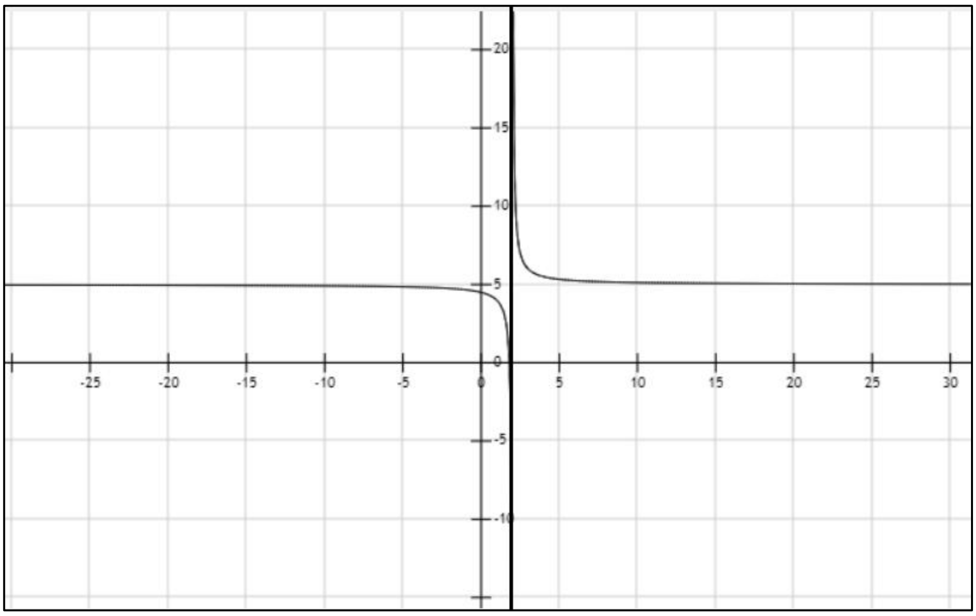
Tip: Kijk nog eens naar de video hieronder, dan zie je wat je allemaal kan met een limiet!

Asymptoten

Asymptoten zijn rechte lijnen waar de grafiek van een functie langs gaat lopen. De grafiek komt dus steeds dichter en dichter bij de rechte lijn, maar snijdt de lijn nooit.

Verticale asymptoten

Als de grafiek langs een verticale lijn gaat lopen wordt deze lijn ook wel een **verticale asymptoot** genoemd. Hier nadert de y de ∞ en/of de $-\infty$, waarbij ∞ voor oneindig staat.



In deze grafiek is de verticale lijn bij $x = 2$ de verticale asymptoot.

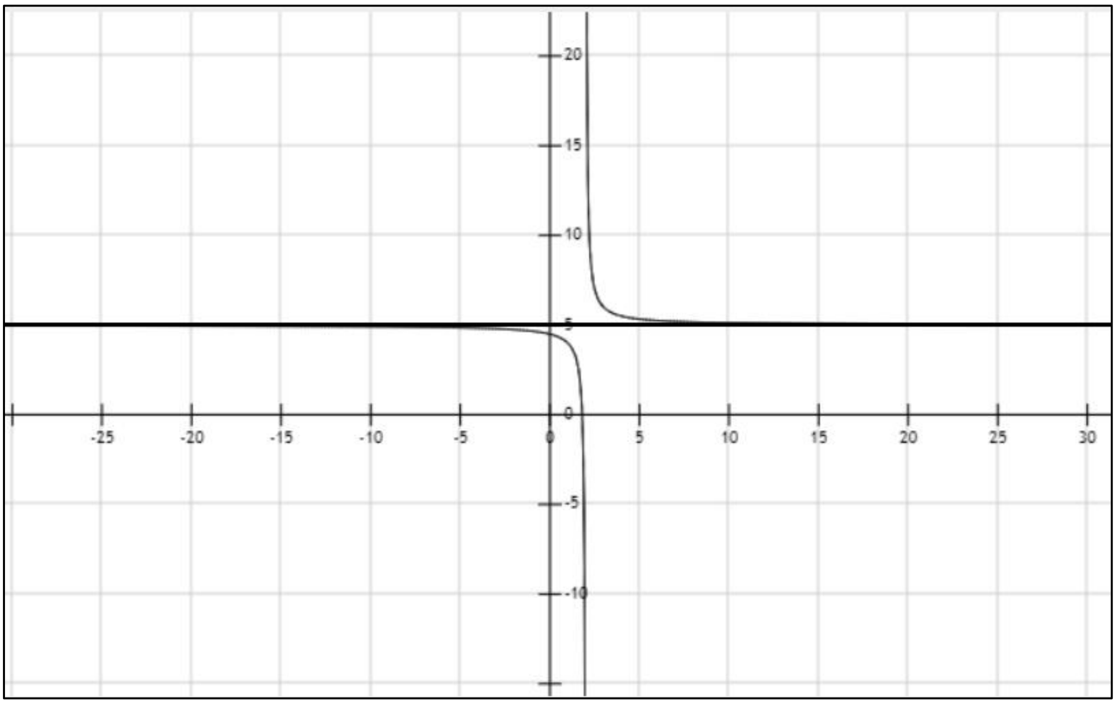
In een formule kun je de verticale asymptoot berekenen door de noemer nul te maken (de teller mag niet gelijk zijn aan nul).

$$f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$$

Bij de voorgaande formule is de verticale asymptoot dus bij $x = 1$, want daar is geen uitkomst.

Horizontale asymptoten

Als de grafiek langs een horizontale lijn gaat lopen wordt deze lijn ook wel een **horizontale asymptoot** genoemd. Hier nadert de x de ∞ en/of de $-\infty$.



In deze grafiek is de horizontale lijn bij $y = 5$ de horizontale asymptoot.

In een formule kun je de horizontale asymptoot berekenen door een hele grote waarde van x in te vullen.

$$f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$$

Door een groot getal in te vullen (bijvoorbeeld $10\,000$), krijg je het volgende:

$$\frac{3 * 10000 + 2}{10000 - 1} \approx 3$$

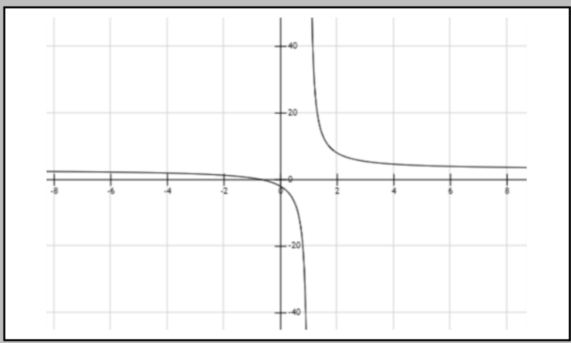
Bij de voorgaande formule gaat de uitkomst dan richting de 3 en daarom is de horizontale asymptoot dus bij $y = 3$.

Dit kun je ook zien in de tabel van je GR.

Vul $f(x)$ in, in je GR :

$$Y_1 = (3x+2)/(x-1)$$

$\mathrm{Y_1} = (3\mathrm{x}+2)/(\mathrm{x}-1)$



X	Y_1			
-3000	2.9983			
-2000	2.9975			
-1000	2.995			
0	-2			
1000	3.005			
2000	3.0025			
3000	3.0017			
4000	3.0013			

In de tabel gaan alle waardes naar 3 en daarom is de horizontale asymptoot dus bij $y = 3$.

Voorbeeldopgave 1: Asymptoten

Vind het domein en de asymptoten van de volgende functie:

$$y = \frac{x^2 + 3x + 1}{4x^2 - 9}$$

Uitwerking

Verticale asymptoot

Deze kun je berekenen door de noemer nul te maken (de teller mag niet gelijk zijn aan nul):

$$4x^2 - 9 = 0$$

$$4x^2 = 9$$

$$x^2 = \frac{9}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

De verticale asymptoot is op $x = 1{,}5$. Voor iedere andere x is een y te bereken. Het domein is dus allesbehalve $x = 1{,}5$.

Verticale asymptoot: $x = 1{,}5$

Horizontale asymptoot

De horizontale asymptoot kun je vinden door een hele grote waarde van x in te vullen. Zoals je kunt zien kun je alle kleine waardes dan verwaarlozen en blijft de volgende formule over:

$$y = \frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}$$

De horizontale asymptoot is dus op $y = 4$.

Gebroken lineaire functie

De algemene formule voor een gebroken lineaire functie is:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

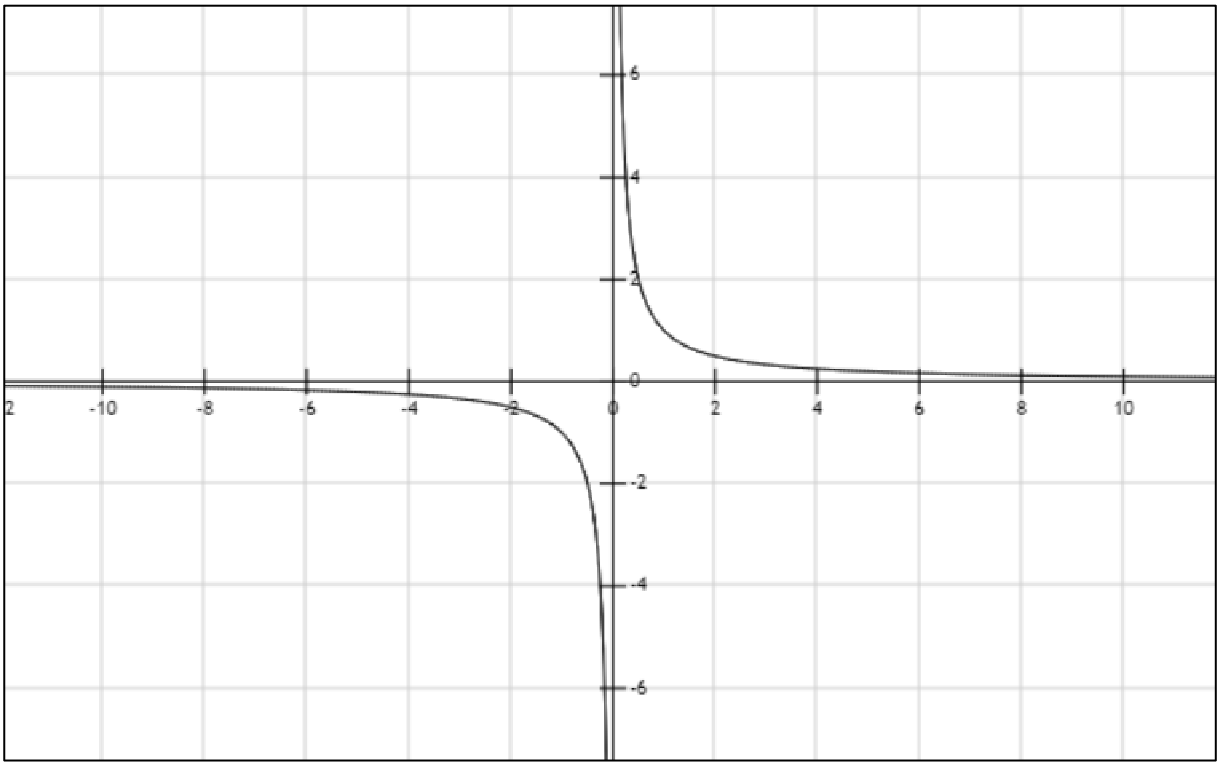
Met:

$$c \neq 0$$

$$\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$$

De standaard gebroken functie heeft de vorm van $f(x) = \frac{1}{x}$.

De grafiek van deze functie ziet er als volgt uit:



Zoals je kunt zien is deze grafiek een hyperbool. Een **hyperbool** is een grafiek die uit twee delen bestaat met twee asymptoten: een horizontale asymptoot en een verticale asymptoot.

Voorbeeldopgave 2: Gebroken lineaire functie

Los de volgende gebroken vergelijking op:

$$\frac{3-5x}{x+3} = -2$$

Uitwerking
Schrijf beide kanten op als een breuk:

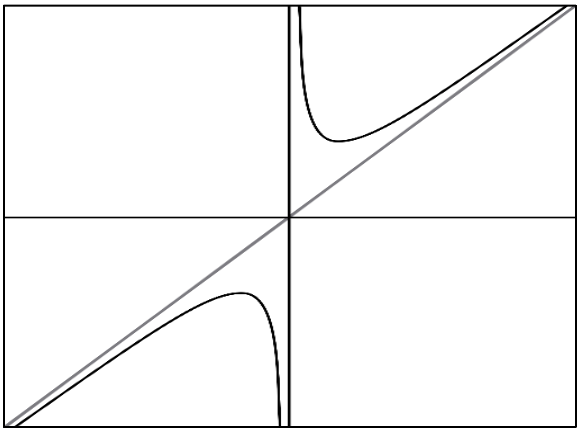
$$\frac{3-5x}{x+3} = \frac{-2}{1}$$

Vermenigvuldig vervolgens kruislings:

$$1(3-5x) = -2(x+3)$$
$$3-5x = -2x-6$$
$$-5x+2x = -6-3$$
$$-3x = -9$$
$$x = \frac{-9}{-3} = 3$$

Scheve asymptoten

Er bestaan niet alleen maar verticale of horizontale asymptoten, er bestaan ook **scheve asymptoten**. Een asymptoot wordt een scheve asymptoot genoemd als deze na verloop van tijd gaat lijken op een lineaire functie.



Zoals je eerder al hebt geleerd heeft een lineaire functie de vorm van:

$$y = ax + b$$

Om te weten of een functie een scheve asymptoot is moet je deze functie vereenvoudigd opschrijven. Zo kun je zien of er een lineair deel is. Dit kun je doen met behulp van het volgende voorbeeld:

Stappenplan	**Voorbeeld** $\dfrac{\mathbf{2x^3 + 4x^2 - 5x - 1}}{\mathbf{x - 1}}$
1. Zet de noemer in de teller en compenseer.	noemer = $x - 1$ teller = $2x^3 + 4x^2 - 5x - 1$ noemer in de teller zetten: $\dfrac{2x^2(x-1) + \mathbf{2x^2} + 4x^2 - 5x - 1}{x - 1}$
	De term $+2x^2$ is nodig om $2x^2(x-1) = 2x^3 - \mathbf{2x^2}$ te compenseren. Er moet namelijk alleen maar $2x^3$ staan.
2. Haal de grootste term eruit. Dit is de term met het hoogste kwadraat x.	$\dfrac{2x^2(x-1)}{x-1} + \dfrac{2x^2 + 4x^2 - 5x - 1}{x - 1} =$ $2x^2 + \dfrac{2x^2 + 4x^2 - 5x - 1}{x - 1} =$
	$2x^2 + \dfrac{6x^2 - 5x - 1}{x - 1} =$
3. Herhaal de truc: Zet de noemer in de teller en compenseer.	noemer = $x - 1$ teller = $6x^2 - 5x - 1$ noemer in de teller zetten: $2x^2 + \dfrac{6x(x-1) + \mathbf{6x} - 5x - 1}{x - 1} =$
	De term $+6x$ is nodig om $6x(x-1) = 6x^2 - \mathbf{6x}$ te compenseren. Er moet namelijk alleen maar $6x^2$ staan.
4. Haal de grootste term eruit. Dit is de term met het hoogste kwadraat x.	$2x^2 + \dfrac{6x(x-1)}{x-1} + \dfrac{6x - 5x - 1}{x - 1} =$ $2x^2 + 6x + \dfrac{6x - 5x - 1}{x - 1} =$
	$2x^2 + 6x + \dfrac{x - 1}{x - 1} =$
	$2x^2 + 6x + 1$

Zoals je kan zien is dit een kwadratische vergelijking. Dit is dus geen scheve asymptoot, want deze gaat na verloop van tijd niet lijken op een lineaire functie.

Nog niet helemaal duidelijk? Scan dan de QR-code.

Video WisBV-B6-2

Voorbeeldopgave 3: Scheve asymptoot

Heeft de volgende functie een scheve asymptoot?

$$f(x) = 2x^2 + \frac{-2x^3 + x^2 + x}{x + 1}$$

Uitwerking

Stappenplan	$\boldsymbol{2x^2 + \frac{-2x^3 + x^2 + x}{x + 1}}$
1. Zet de noemer in de teller en compenseer.	Noemer = $x + 1$ Teller = $-2x^3 + x^2 + x$ Noemer in de teller zetten: $2x^2 + \frac{-2x^2(x + 1) + \boldsymbol{2x^2} + x^2 + x}{x + 1}$
	De term $+2x^2$ Is nodig om $-2x^2(x + 1) = 2x^3 - \boldsymbol{2x^2}$ Te compenseren. Er moet namelijk alleen maar $2x^3$ Staan.
2. Haal de grootste term eruit. Dit is de term met het hoogste kwadraat $\boldsymbol{x}$.	$2x^2 - \frac{2x^2(x + 1)}{(x + 1)} + \frac{2x^2 + x^2 + x}{x + 1} =$ $2x^2 - 2x^2 + \frac{2x^2 + x^2 + x}{x + 1} =$
	$\frac{3x^2 + x}{x + 1} =$
3. Herhaal de truc: Zet de noemer in de teller en compenseer.	Noemer = $x + 1$ Teller = $3x^2 + x$ Noemer in de teller zetten: $\frac{3x(x + 1) - \boldsymbol{3x} + x}{x + 1} =$
	De term -$3x$ is nodig om $3x(x + 1) = 3x^2 + 3x$ te compenseren. Er moet namelijk alleen maar $3x^2$ Staan.
4. Haal de grootste term eruit. Dit is de term met het hoogste kwadraat $\boldsymbol{x}$.	$\frac{3x(x + 1)}{x + 1} + \frac{-3x + x}{x + 1} = 3x + \frac{-2x}{x + 1}$

5. Herhaal de truc: **Zet de noemer in de teller en compenseer.**	Noemer = $x + 1$ Teller = $-2x$ Noemer in de teller zetten: $3x + \frac{-2(x+1)+2}{x+1}$
	De term $+2$ is nodig om $-2(x+1) = -2x - 2$ te compenseren. Er moet namelijk alleen maar $-2x$ staan.
5. **Haal de grootste term eruit. Dit is de term met het hoogste kwadraat *x*.**	$3x - \frac{2(x+1)}{x+1} + \frac{2}{x+1} =$ $3x - 2 + \frac{2}{x+1}$

Nu kunnen we dus de hele functie schrijven als:

$$f(x) = 3x - 2 + \frac{2}{x+1}$$

We weten dat $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x+1} = 0$. Omdat als je $x \to \infty$ invult je het volgende krijgt:

$$\frac{2}{\infty + 1} \approx \frac{2}{\infty} \approx 0$$

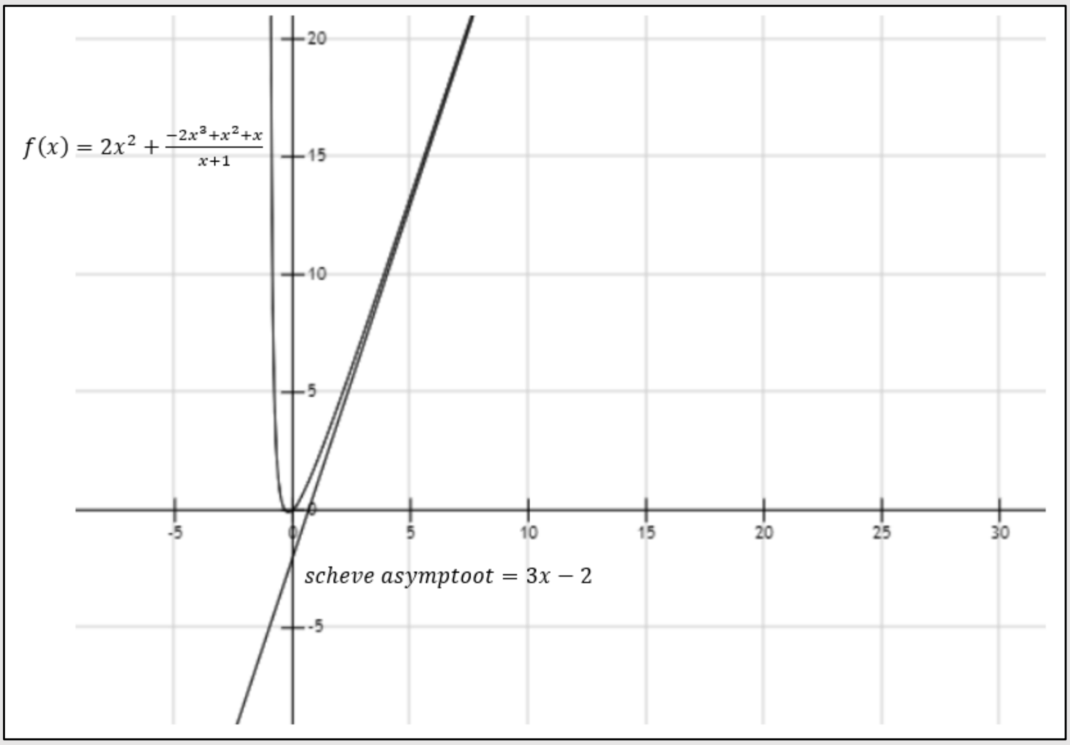
Je kunt hier in plaats van oneindig ook een heel groot getal invullen. Als je bijvoorbeeld 100.000 invult, zul je zien dat het antwoord bijna hetzelfde zal zijn:

$$\frac{2}{100.000 + 1} \approx \frac{2}{100.000} \approx 0$$

Hier blijft dus een lineaire functie over:

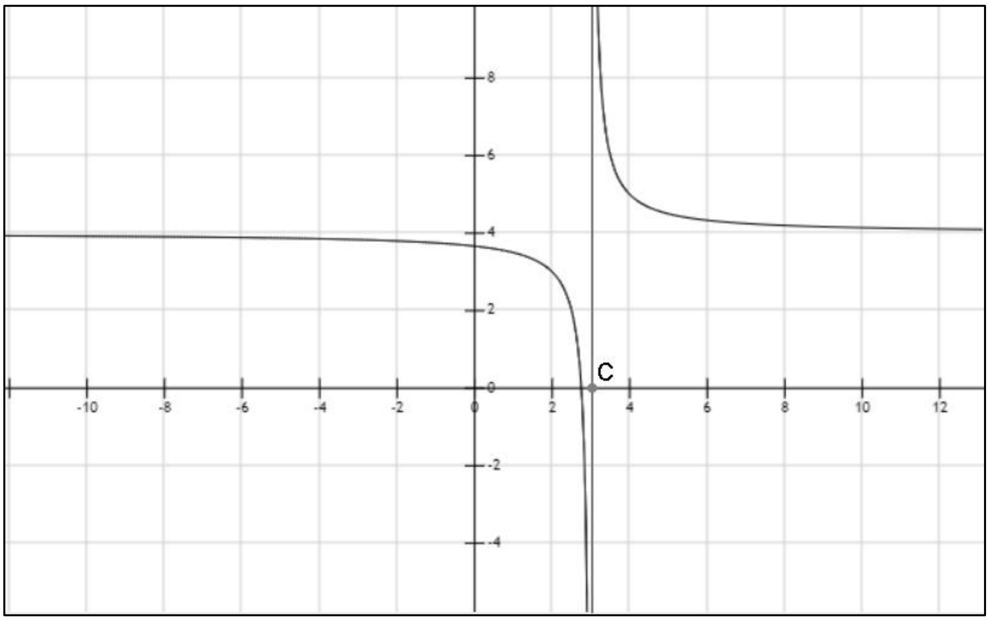
$$3x - 2$$

De functie $f(x) = 2x^2 + \frac{-2x^3+x^2+x}{x+1}$ heeft dus een scheve asymptoot $3x - 2$ omdat $f(x)$ na verloop van tijd gaat lijken op een lineaire functie:



Linker- en rechterlimiet

Soms is het handig om naar twee limieten te kijken als de formule van een functie vóór en na een bepaalde waarde van x niet exact hetzelfde is. Het $\lim_{x\to c} f(x)$ bestaat dan niet, dus dan is het handiger om naar de linkerlimiet $\lim_{x\uparrow c} f(x)$ (limiet van onder) en rechterlimiet $\lim_{x\downarrow c} f(x)$ (limiet van boven) te kijken. Dit zie je bijvoorbeeld in onderstaande grafiek:



Hier gaat de linkerlimiet $\lim_{x\uparrow c} f(x)$ (limiet van onder) tot 3. Dit betekent dat je van de getallen die kleiner zijn dan 3 (2,9 en 2,99999 ect.) naar 3 toegaat maar 3 nooit bereikt.

Hier gaat de rechterlimiet $\lim_{x\downarrow c} f(x)$ (limiet van boven) ook tot 3. Dit betekent dat je van de getallen die groter zijn dan 3 (3,1 en 3,00000001 ect.) naar 3 toegaat maar 3 nooit bereikt.

Als de linker- en rechterlimiet dus dezelfde waarde hebben (in dit geval zouden ze beide compleet naar 3 moeten gaan), spreek je van een normaal $\lim_{x \to c}$ limiet.

Perforaties

Als een limiet uitkomt op $\frac{0}{0}$ wordt dit ook wel een **perforatie** genoemd. Een perforatiepunt is een punt waar de functie geen waarde heeft. Dit betekent dus dat je de noemer en de teller door dezelfde factor kan wegdelen en je geen zinnig antwoord krijgt. De oplossing hiervoor is om de formule om te schrijven naar een andere breuk.

Video WisBV-B6-3

Om te zorgen dat je perforaties goed onder controle hebt kan je nog naar de video kijken!

Voorbeeldopgave 4: Perforatie

Heeft de volgende functie perforatie en zo ja in welk punt?

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{2x - 2}$$

Uitwerking

Door de noemer gelijk te stellen aan nul krijg je:

$$2x - 2 = 0$$

$$x = 1$$

Nu zou je dus denken dat daar een verticale asymptoot zit. Maar als je $x = 1$ invult in de formule krijg je $f(x) = \frac{1^2-3+2}{2-2} = \frac{0}{0}$. Dit is dus een perforatie en het is dus nodig om de formule te herschrijven om de coördinaten van de perforatie te vinden:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{2x - 2} = \frac{(x-1)(x-2)}{2(x-1)} = \frac{x-2}{2} = \frac{1}{2}x - 1$$

Als we nu $x = 1$ invullen in bovenstaande formule krijgen we:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2} * 1 - 1 = \frac{1}{2}$$

De perforatie zit dus in punt $(1, \frac{1}{2})$.

Afsluiting domein B

Zo! Je hebt het grootste domein nu alweer afgerond. Lekker bezig! De volgende domeinen zullen voortborduren op deze kennis, dus zorg dat je de kennis goed onder de knie hebt!

Log in op onze website www.examengevat.nl, ga naar Mijn Account > Mijn leeromgeving > het desbetreffende vak en domein. Of… **scan onderstaande QR-code, dan kom je meteen bij de oefenvragen van Domein B van Wiskunde B – VWO (vergeet niet eerst in te loggen!):**

OEFENVRAGEN WB -V

Oefenopgaven Domein B6

Vraag 1

Heeft de volgende functie een scheve asymptoot?

$$f(x) = \frac{3x^2 + x - 2}{x + 6}$$

Vraag 2

Vind het domein en de verticale asymptoten van de volgende functie:

$$y = \frac{x + 2}{x^2 + 2x - 8}$$

Vraag 3

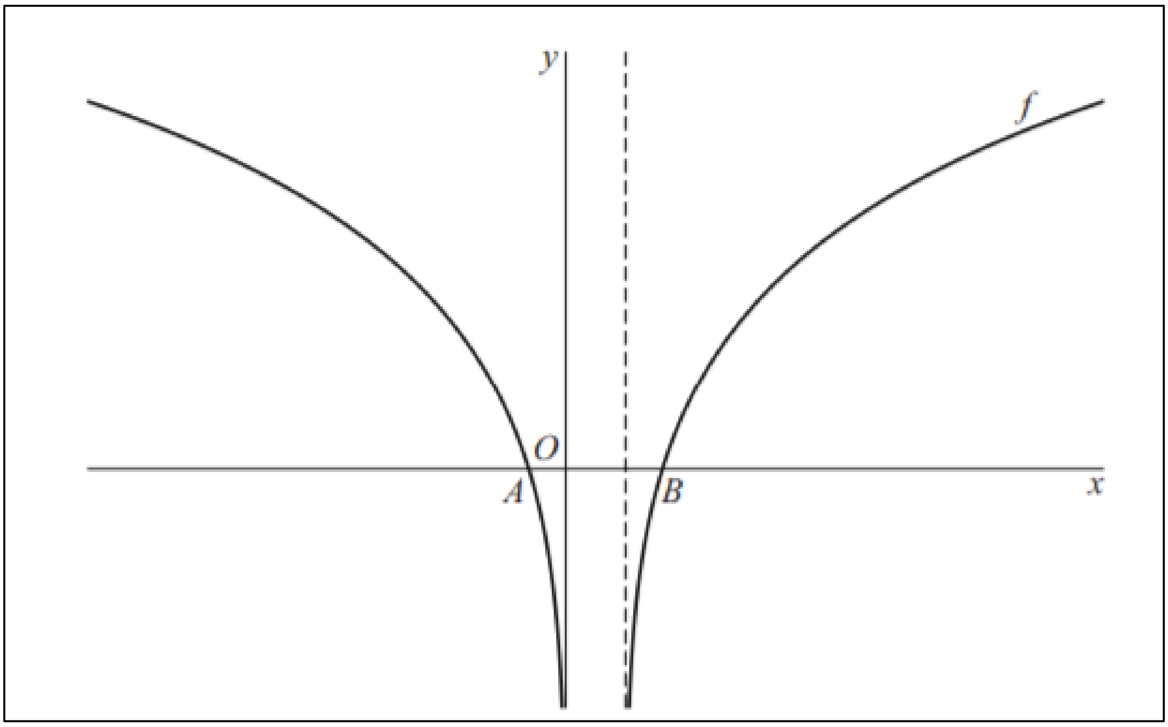
Vind de horizontale asymptoot van de volgende functie:

$$y = \frac{2x^2 - 11}{x^2 + 9}$$

Vraag 4

De functie van f is gegeven door:

$$f(x) = {}^{2}\log\left(x^2 - x\right)$$



De grafiek van f heeft twee verticale asymptoten. Geef van elk van deze asymptoten een vergelijking.

Vraag 5

Gegeven:

$$f(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x - 2}$$

Bereken de verticale en horizontale asymptoot.

Vraag 6
Gegeven:

$$f(x) = \frac{\ln(x) - 1}{2\ln(x) - 3}$$

Bereken de verticale en horizontale asymptoot.

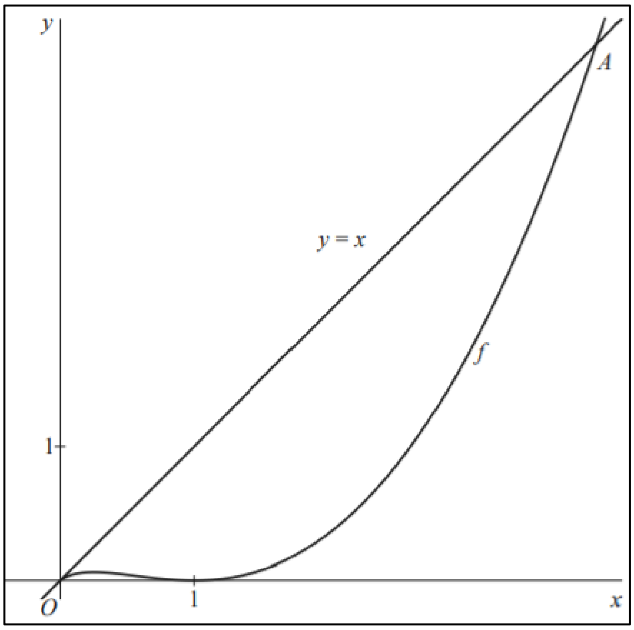
Vraag 7
Heeft de volgende functie een perforatie en zo ja in welk punt?

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - 2x}$$

Oefenopgaven Domein B

Vraag 1 (examenopgave 2015-II - vraag 4)

De functie f wordt gegeven door $f(x) = \left(x - \sqrt{x}\right)^2$ In het volgende figuur zijn de grafiek van f en de lijn $y = x$ getekend.



De grafiek van f en de lijn $y = x$ hebben behalve de oorsprong het punt A gemeenschappelijk.
Bereken exact de x-coordinaat van punt A.

Vraag 2 (examenopgave 2010-I - vraag 13)

De functies f en g zijn gegeven door:

$$f(x) = 2^{4x+1}$$
$$g(x) = 4 * 4^x$$

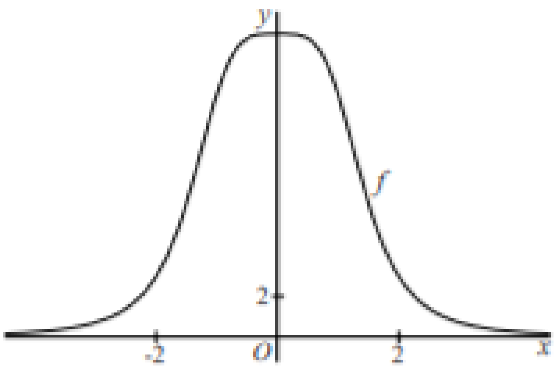
Bereken op algebraïsche wijze de coördinaten van het snijpunt van de grafieken f en g.

Vraag 3 (examenopgave 2014-I - vraag 5)

De functie f is gegeven door:

$$f(x) = \frac{60}{x^4 + 4}$$

In het volgende figuur is de grafiek van f getekend:



De horizontale lijn met vergelijking y=2 snijdt de grafiek van f in twee punten.
Bereken exact de coördinaten van deze twee punten.

Vraag 4 (examenopgave 2012-I - vraag 10)

De functie f is gegeven door:

$$f(x) = \sqrt{4x - 12}$$

De lijn met vergelijking $y = 2x - 5$ en de grafiek van f snijden elkaar niet. Toon dit op algebraïsche wijze aan.

Vraag 5 (examenopgave 2012-I - vraag 12)
De functie f is gegeven door:

$$f(x) = \sqrt{4x - 12}$$

De functie g is gegeven door:

$$g(x) = \sqrt{x}$$

De grafiek van f ontstaat uit de grafiek van g door twee transformaties toe te passen.
Geef aan welke twee transformaties dit kunnen zijn en in welke volgorde ze moeten worden toegepast.

Vraag 6
De functie $f(x)$ is gegeven door:

$$f(x) = {}^{3}\log{(x + 2)}$$

De functie $g(x)$ is gegeven door:

$$g(x) = 1 + {}^{3}\log{(2x - 11)}$$

Bereken algebraïsch:

$$f(x) \geq g(x)$$

Vraag 7 (examenopgave 2018 I – vraag 12)
De functie f wordt gegeven door $f(x) = \ln(\sqrt{x})$. Deze functie heeft een inverse functie f^{inv}. Er geldt: $f^{inv}(x) = e^{2x}$.

Bewijs dat inderdaad geldt $f^{inv}(x) = e^{2x}$.

Vraag 8 (examenopgave 2015 I – vraag 4)
Aan de sterrenhemel bevinden zich heldere en minder heldere sterren. De helderheid van een ster werd in de oudheid reeds aangegeven met een getal: de magnitude van de ster. Zeer heldere sterren kregen magnitude 1. Nauwelijks zichtbare sterren kregen magnitude 6. Een kleine waarde betekent dus een grote helderheid. In deze opgave is m de magnitude.

Tegenwoordig meet men de hoeveelheid licht die van een ster wordt ontvangen. De helderheid van een ster wordt dan vaak uitgedrukt in lux (een eenheid voor verlichtingssterkte). In deze opgave is L de helderheid in lux. In de tabel staan voor een aantal helderheden de waarden van m en L.

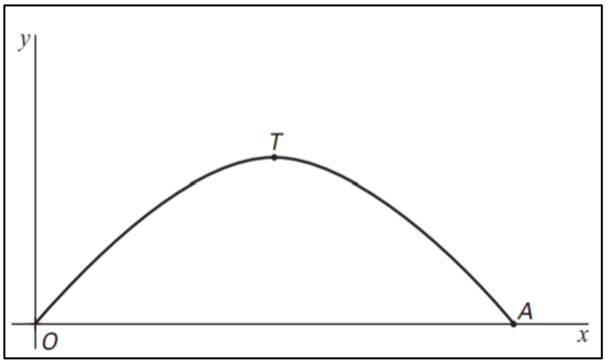
$\boldsymbol{m}$	$\mathbf{1,0}$	$\mathbf{2,0}$	$\mathbf{3,0}$	$\mathbf{4,0}$	$\mathbf{5,0}$	$\mathbf{6,0}$
$\boldsymbol{L}$	$1{,}0 * 10^{-6}$	$4{,}0 * 10^{-7}$	$1{,}6 * 10^{-7}$	$6{,}3 * 10^{-8}$	$2{,}5 * 10^{-8}$	$1{,}0 * 10^{-8}$

Tussen L en m bestaat een exponentieel verband van de vorm:

$$L = 10^{p+qm}$$

Leid uit de tabelgegevens bij $m = 1{,}0$ en $m = 6{,}0$ af dat $p = -5{,}6$ en $q = -0{,}4$.

Vraag 9 (examenopgave 2005 II – vraag 1)
Met domein $[0, \pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \sin x$. De grafiek van f snijdt de x-as in O en A en heeft als top T:

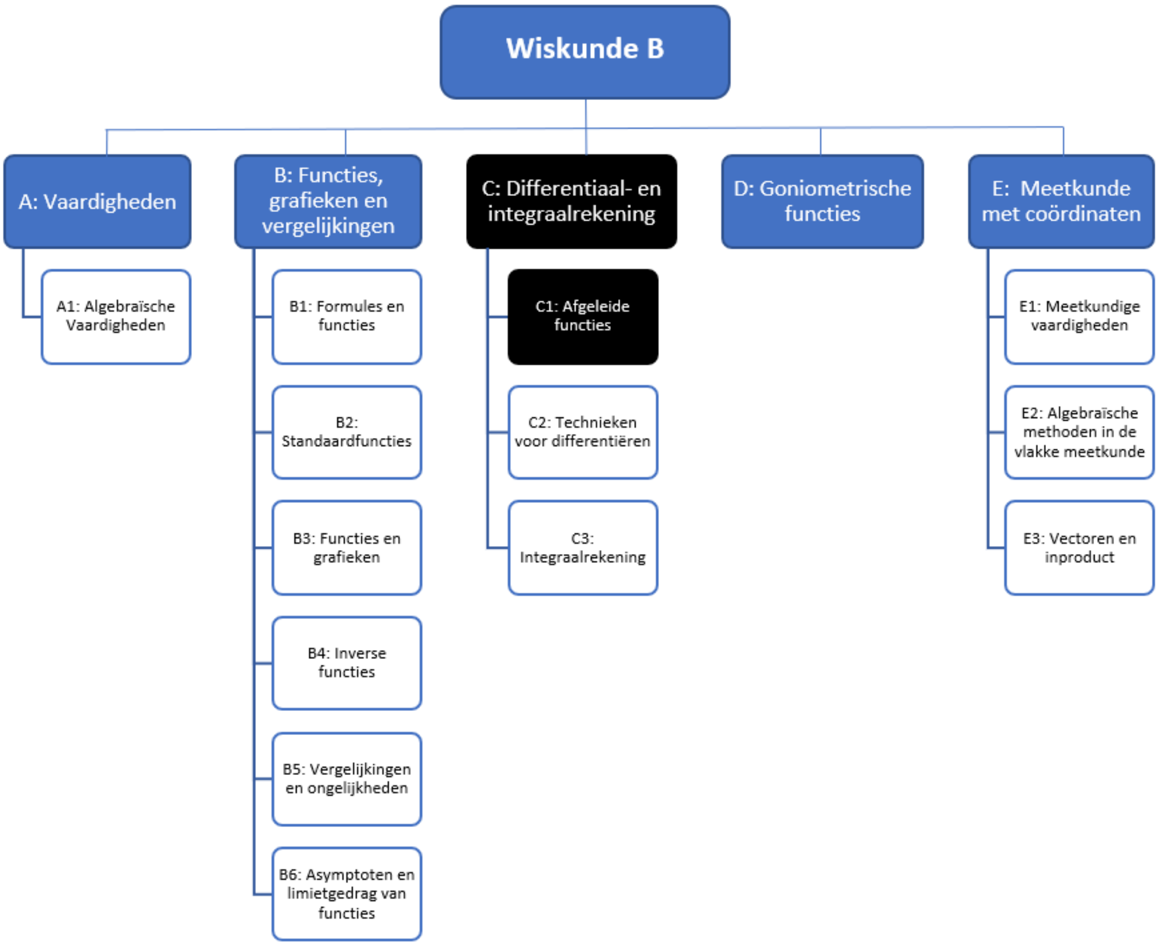


Gegeven is verder de tweedegraadsfunctie $g(x) = ax(x - \pi)$, eveneens met domein $[0, \pi]$. We nemen $a = -\frac{4}{\pi^2}$. De grafieken van f en g lijken dan op elkaar.

Toon aan dat ook de grafiek van g door O, A en T gaat.

Domein C1: Afgeleide functies

Vakoverzicht



Dit domein gaan we differentiëren en integreren. Bij het differentiëren gaan we werken met de eerste en tweede afgeleide van een functie en hoe dit toepasbaar is op grafieken. Bij het integreren gaan we totalen berekenen, zoals de totale oppervlakte onder een grafiek. Na dit domein gaat het je uiteindelijk helemaal lukken om functies te differentiëren en integreren! Succes ermee!

Afgeleide

De verandering van een functie ten opzichte van de verandering van zijn variabelen wordt ook wel de **afgeleide** genoemd in de wiskunde. Makkelijk verwoord: de afgeleide is de *helling* van de functie f voor elke waarde van x. Met behulp van de afgeleide is het dus heel makkelijk te zien of een grafiek daalt of stijgt!

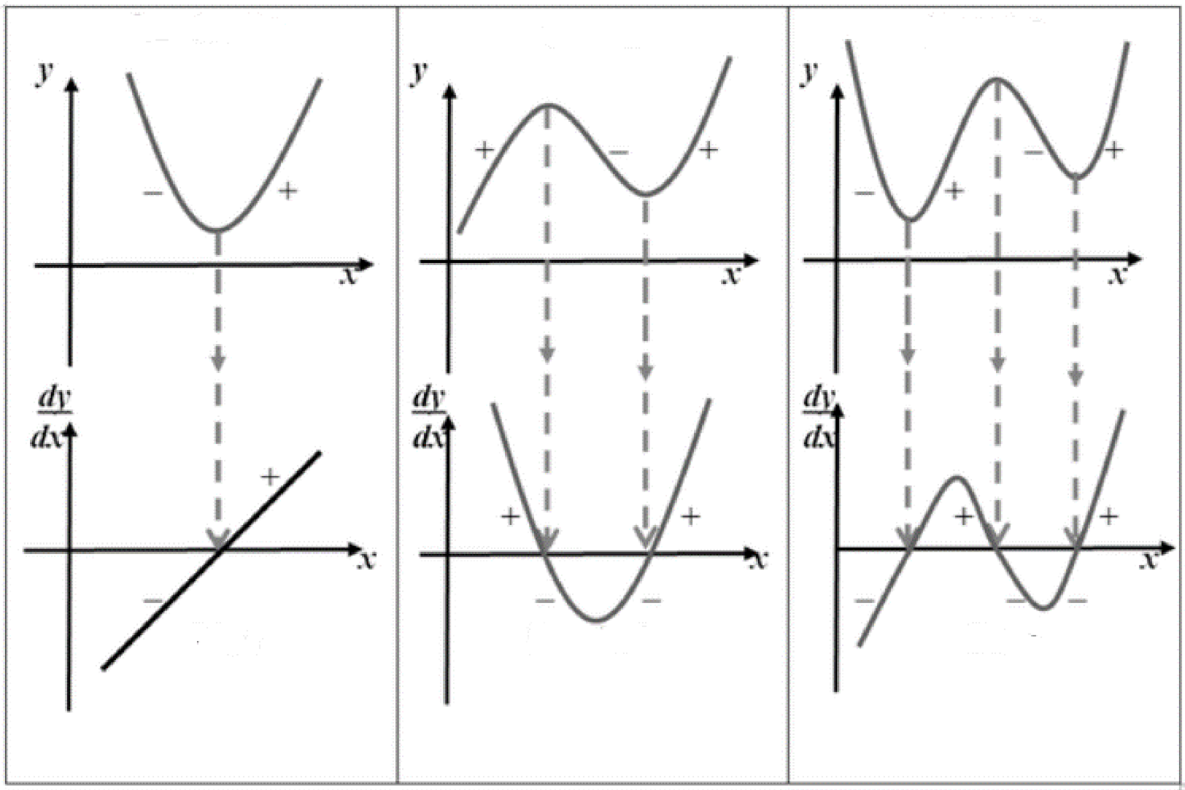
Door middel van differentiëren kun je een afgeleide berekenen. Door een functie $f(x)$ te differentiëren krijg je uiteindelijk de afgeleide functie $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

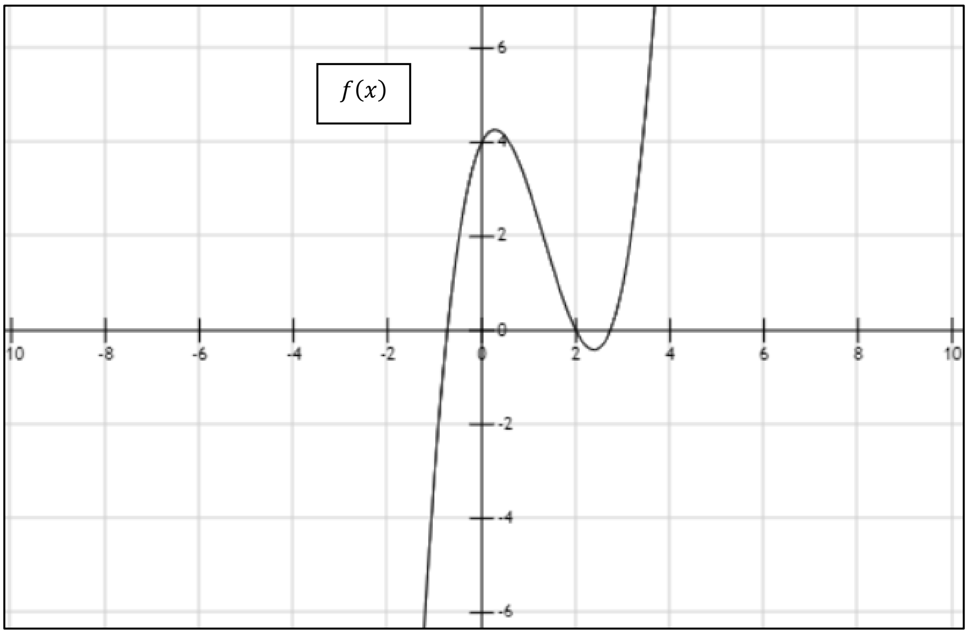
Met:

$f'(x) < 0$	De grafiek van $f(x)$ daalt.
$f'(x) = 0$	De grafiek van $f(x)$ bevindt zich op een top.
$f'(x) > 0$	De grafiek van $f(x)$ stijgt.

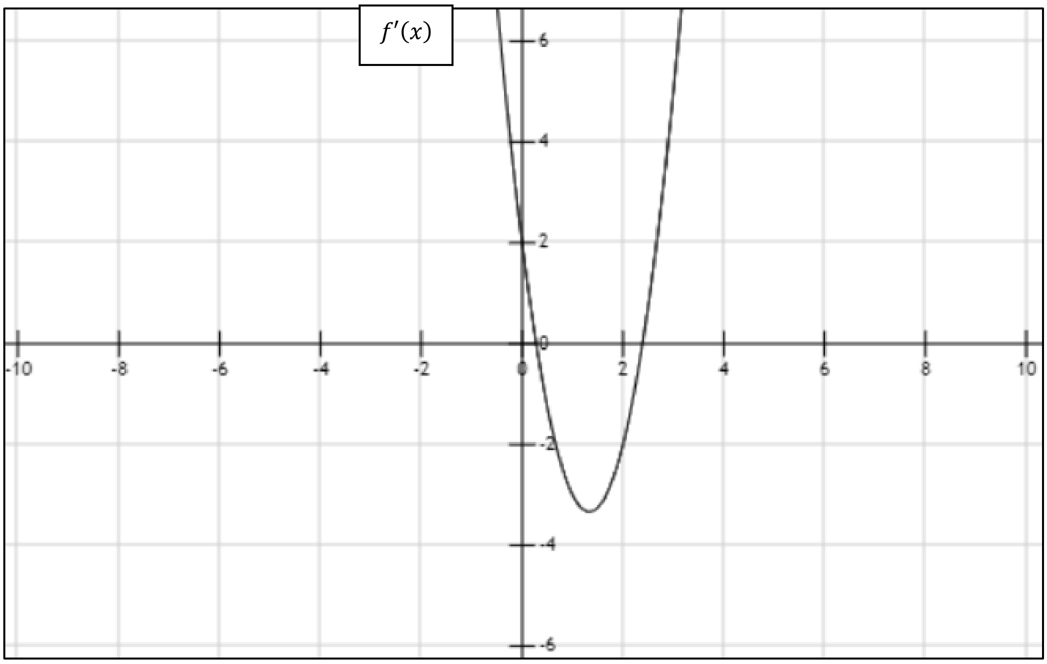
Met bovenstaande informatie is het dus ook mogelijk om de grafiek van $f(x)$ ongeveer te schetsen wanneer je $f'(x)$ weet en vice versa:



Dit is allemaal heel logisch. Ga maar na: op een top is de helling nul, dus de afgeleide is dan ook nul!

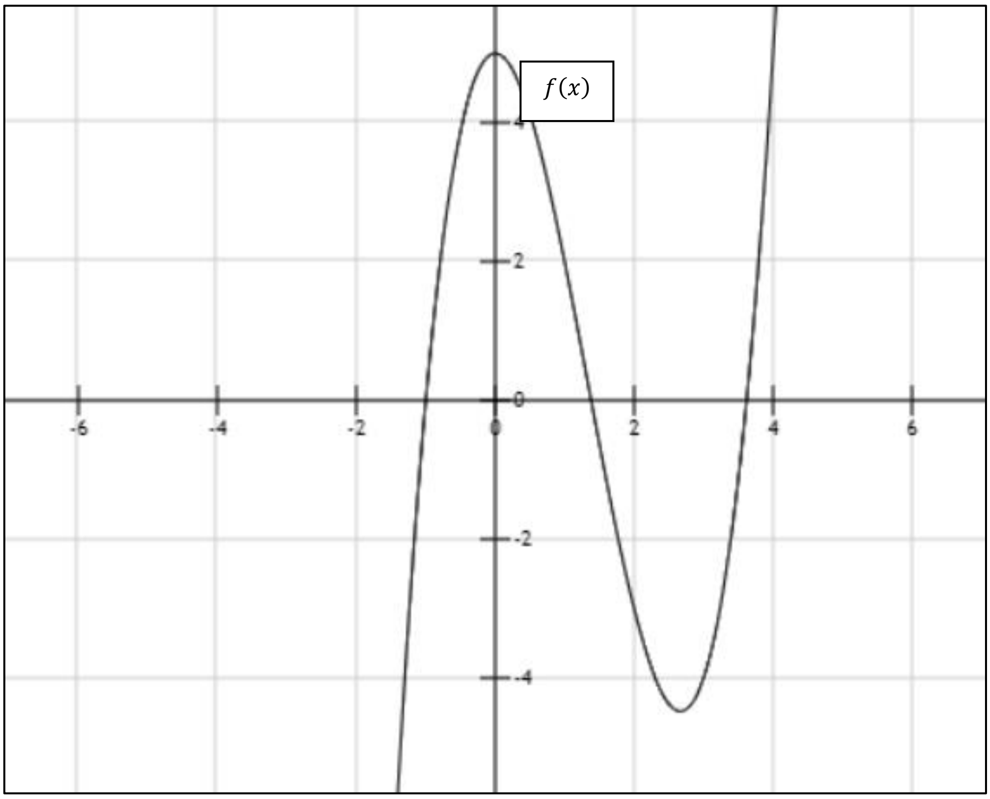


In de bovenstaande grafiek zie je bijvoorbeeld twee toppen op $x = 0{,}3$ en $x = 2{,}4$. Op deze punten moet de afgeleide dus ook nul zijn. Zoals je ziet, is dit een feit als je een plot maakt van de afgeleide:



Hier zie je ook dat de afgeleide kleiner is dan nul op het punt waar de functie daalt en groter is dan nul op het moment dat de functie stijgt.

Ander voorbeeld! Zie de grafiek hieronder:



Je ziet hier twee toppen op $x = 0$ en $x = 2{,}67$. Op deze punten moet de afgeleide dus ook nul zijn.

Zoals je ziet, is dit een feit als je een plot maakt van de afgeleide:

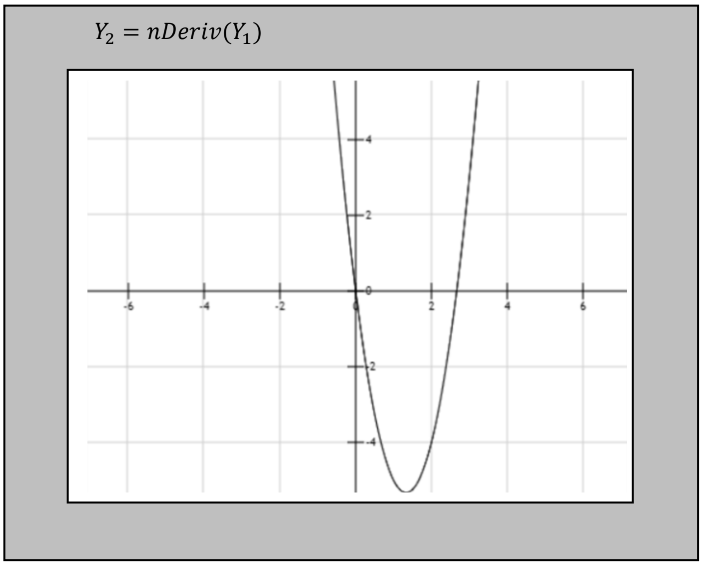
1. Zet de functie waarvan je de hellinggrafiek wilt weten in het Y_1-venster:

$$Y_1 = x^3 - 4x^2 + 5$$

2. Voer de afgeleide functie in:

$$Y_2 = nDeriv(Y_1)$$

3. Kies **MATH**
4. Kies **8:nDeriv**
5. Kies **ENTER**
6. Kies **VARS Y-VARS**
7. Kies **1:Function**
8. Kies **Enter**
9. Kies **1:**$\boldsymbol{Y_1}$
10. Kies **ENTER**



Hier zie je ook dat de afgeleide kleiner is dan nul op het punt waar de functie daalt en groter is dan nul op het moment dat de functie stijgt.

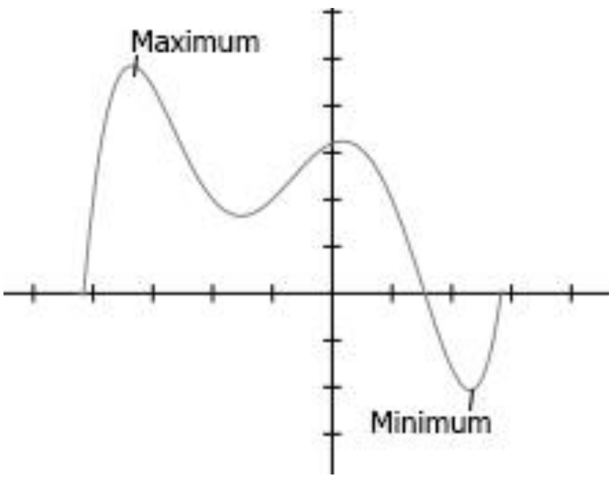
Wil je meer uitleg met behulp van een voorbeeld? Scan dan de QR-code!

Toppen bepalen

Nu je weet dat een grafiek zich op een top bevindt als $f'(x) = 0$, is het ook een stuk makkelijker om de coördinaten van de toppen te bepalen. Dit doe je dus gewoon door de afgeleide gelijk te stellen aan nul! Hierna kun je de x-coördinaat in de functie invullen om zo het y –coördinaat te berekenen en dus de coördinaten van de toppen te bepalen.

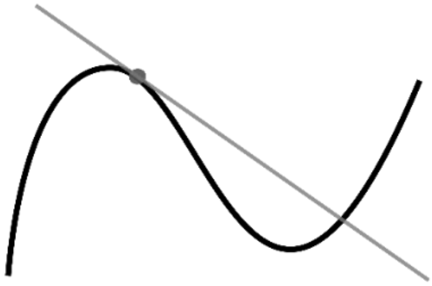
Extreme waardes bepalen

Zodra je de toppen weet van een bepaalde functie is het ook makkelijk om de extreme waardes te bepalen! Je weet de toppen al, nu moet je alleen nog maar bepalen of dit een minimum of maximum is. Dit kun je gemakkelijk doen door de functie in je rekenmachine te zetten en in de grafiek te kijken of de top een maximum of een minimum is.



De raaklijn bepalen

Een raaklijn aan een kromme in een punt P is een rechte lijn met dezelfde richting als die kromme op punt P:



De raaklijn is geschreven in de vorm:

$$y = ax + b$$

Waarin:

$a \ = \ de\ richtingscoëfficiënt$ van de raaklijn, oftewel $f'(x)$, de afgeleide van $f(x)$.

$b = de\ beginwaarde$, deze kan worden uitgerekend door de coördinaten van het bovengenoemde punt P in te vullen in de formule: $y = ax + b$

Video WisBH-D4-1

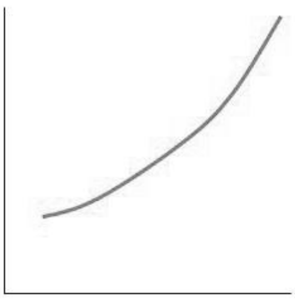
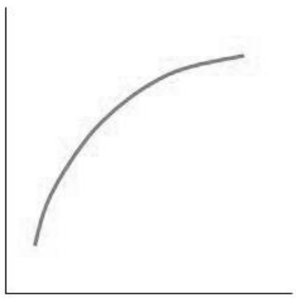
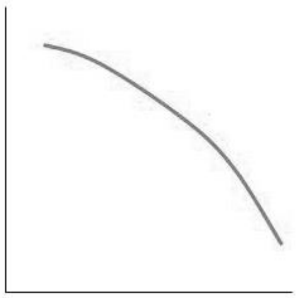
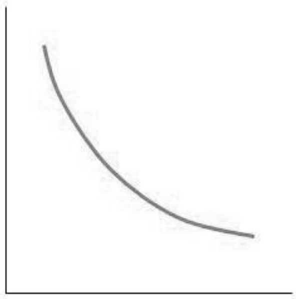
In deze video wordt het nog eens stap voor stap voor je uitgelegd!

Tweede afgeleide

De afgeleide kun je ook weer differentiëren. Dit noem je de tweede afgeleide $f''(x)$. De tweede afgeleide beschrijft nog beter hoe een grafiek verloopt. Door een functie $f(x)$ dubbel te differentiëren of door de afgeleide $f'(x)$ te differentiëren krijg je dus uiteindelijk de tweede afgeleide:

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

In plaats van alleen stijgen/dalen kom je nu te weten of de grafiek afnemend stijgend/dalend is of toenemend stijgend/dalend:

	Toenemende stijging	**Afnemende stijging**
$\boldsymbol{f'(x)} > 0$	 $f''(x) > 0$	 $f''(x) < 0$
	Toenemende daling	**Afnemende daling**
$\boldsymbol{f'(x)} < 0$	 $f''(x) < 0$	 $f''(x) > 0$

Voorbeeldopgave 1: Daling of stijging?

De afgeleide is groter dan nul en de tweede afgeleide is kleiner dan nul. Wat voor stijging heeft de grafiek?

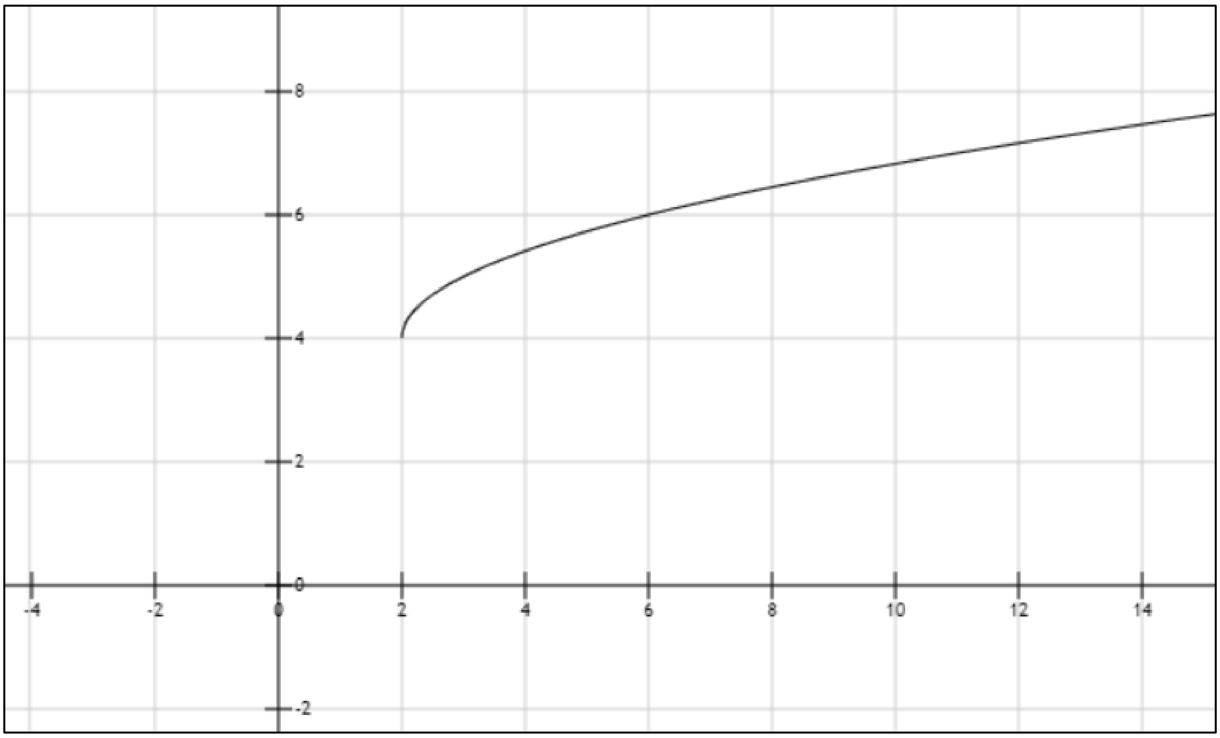
Uitwerking

De afgeleide is groter dan nul ($f'(x) > 0$) en de tweede afgeleide is kleiner dan nul ($f''(x) < 0$). Dit aflezen uit bovenstaande tabel laat zien dat er sprake is van een afnemende stijging.

Randpunt

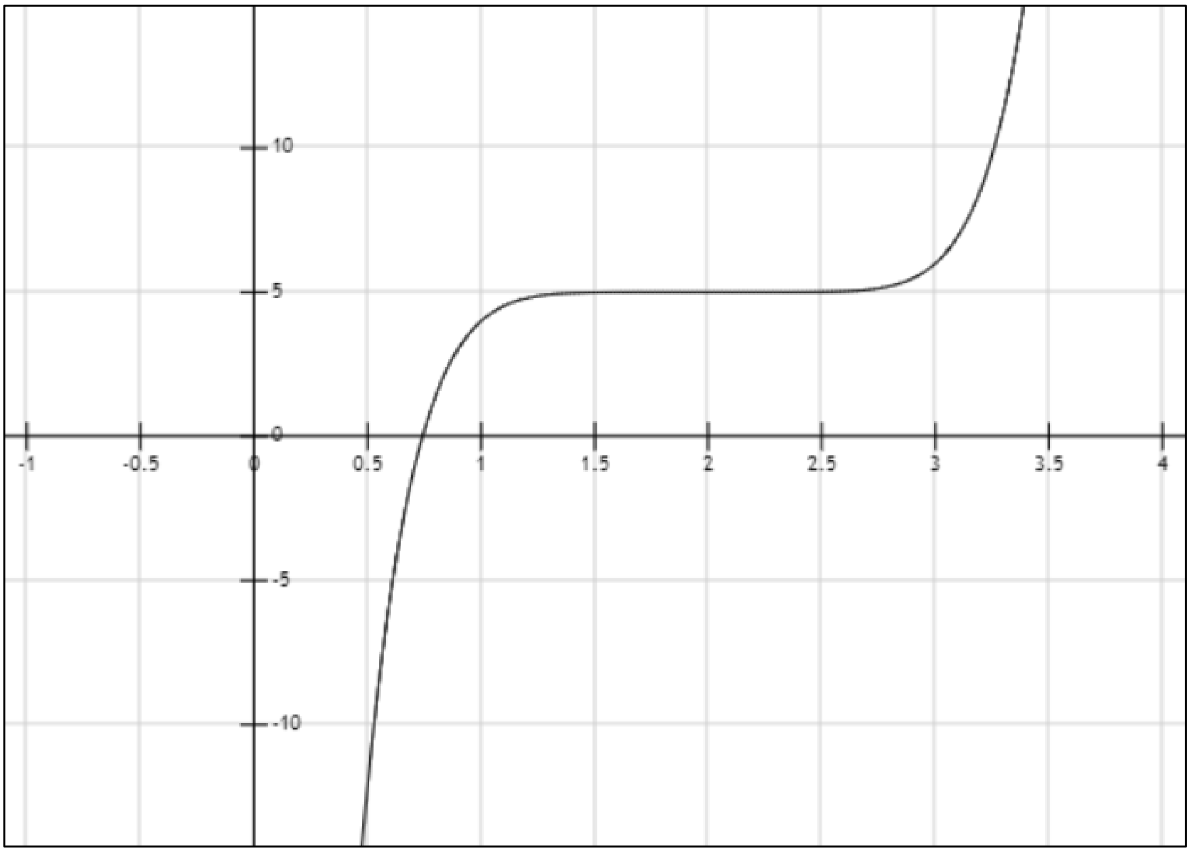
Tot nu toe zijn de meeste grafieken waarmee je werkt kromme of rechte lijnen die nergens beginnen en nergens eindigen. Maar bij sommige functies begint en/of stopt een grafiek ergens. Dit punt noemen we een **randpunt.**

Bekijk bijv. de functie $f(x) = 4 + \sqrt{(x-2)}$. Omdat er onder een wortelteken geen negatief getal mag staan, is de kleinste waarde voor x die je kunt invullen gelijk aan 2. Je vindt $f(2) = 4 + \sqrt{(2-2)} = 4$ De bijbehorende grafiek begint dan ook in het punt $(2{,}4)$ en dat is dan een randpunt:



Buigpunt

Soms is de afgeleide nul is, maar er is geen top. Dat is bijvoorbeeld bij punt $(2{,}5)$ in deze grafiek het geval:



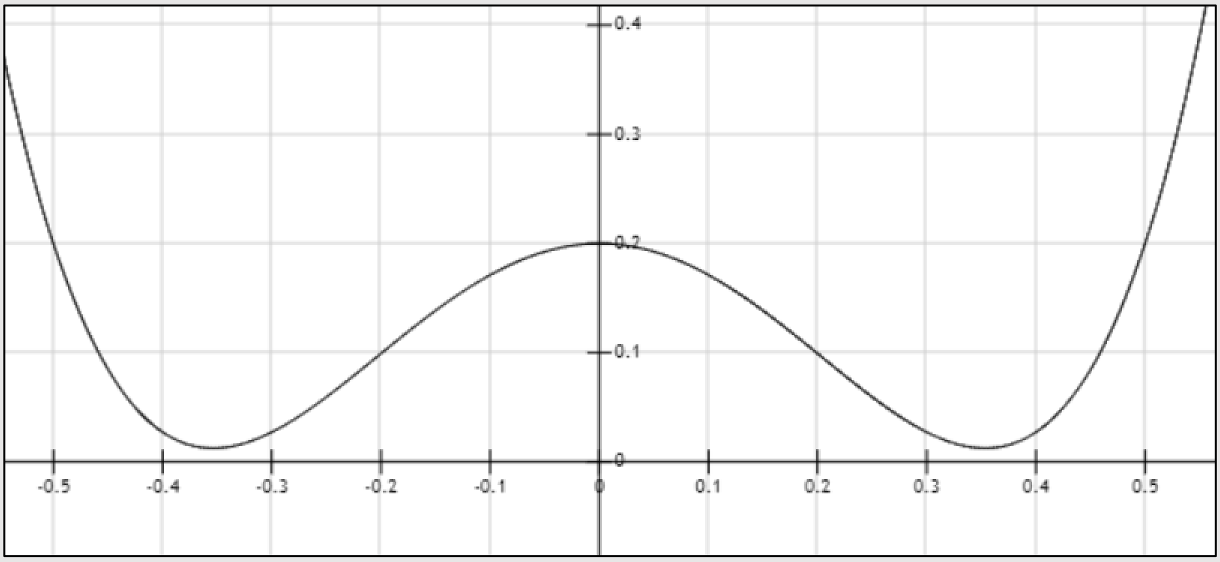
In dit punt gaat de grafiek over van afnemend stijgend naar toenemend stijgend, dit punt wordt ook wel buigpunt genoemd. De raaklijn aan dit punt wordt ook wel buigraaklijn genoemd. Om deze te berekenen moet je de tweede afgeleide gelijkstellen aan nul:

$$f''(x) = 0$$

In het overzichtelijke filmpje hiernaast wordt het concept buigpunten nog eens voor je uitgelegd!

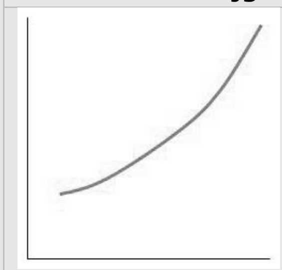
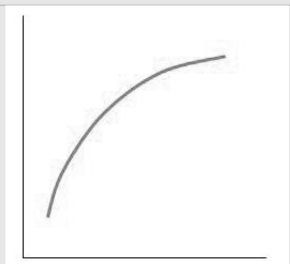
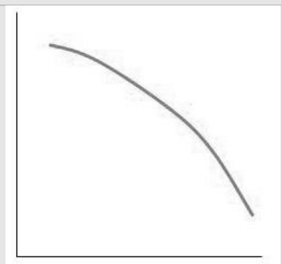
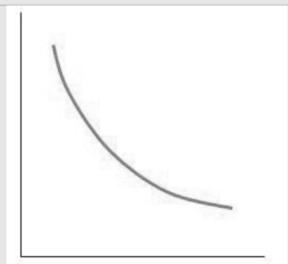
Voorbeeldopgave 2: Buigpunten

Lees de buigpunten en toppen af van de volgende grafiek. Bepaal ook wanneer het toenemend dalend/stijgend is of afnemend dalend/stijgend.



Uitwerking

Gebruik de volgende tabel:

Toenemende stijging	Afnemende stijging	Toenemende daling	Afnemende daling
			

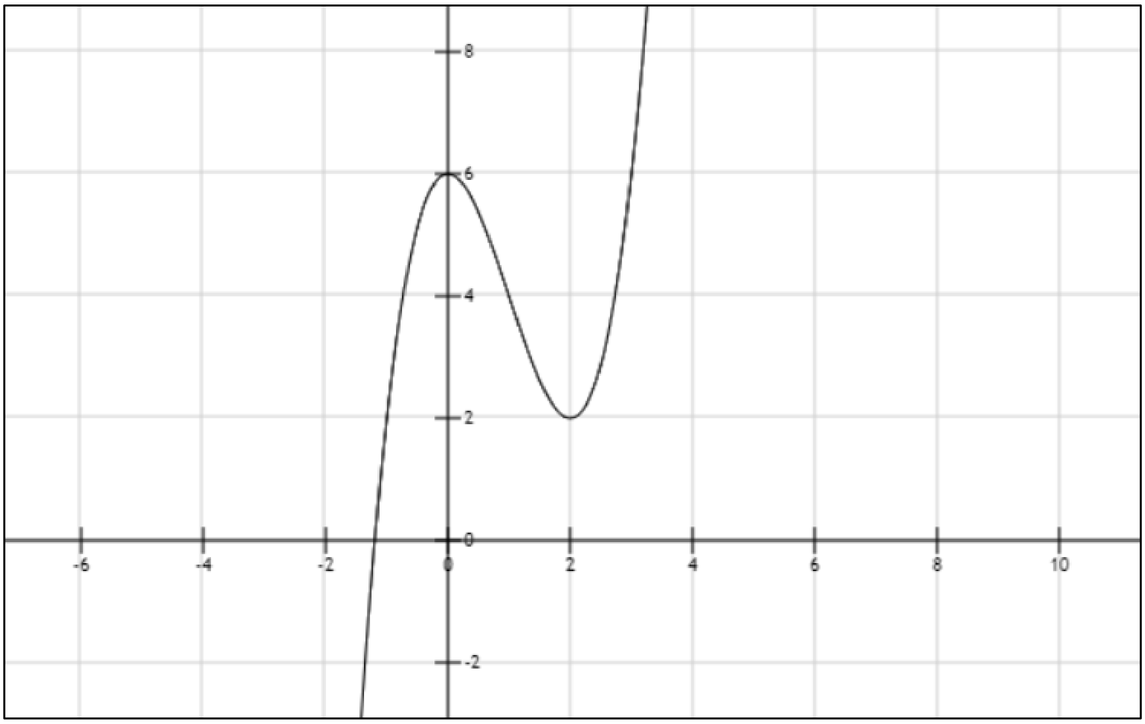
Als je deze tabel vergelijkt met de grafiek zie je:

$x \approx \langle \leftarrow\ , -0,35 \rangle$	Afnemende daling
$x \approx -0,35$	Top
$x \approx \langle -0,35\ , -0,2 \rangle$	Toenemende stijging
$x \approx -0,2$	Buigpunt
$x \approx \langle -0,2\ ,\ 0,0 \rangle$	Afnemende stijging
$x \approx 0,0$	Top
$x \approx \langle 0,0\ , 0,2 \rangle$	Toenemende daling
$x \approx 0,2$	Buigpunt
$x \approx \langle 0,2\ , 0,35 \rangle$	Afnemende daling
$x \approx 0,35$	Top
$x \approx \langle 0,35\ , \rightarrow \rangle$	Toenemende stijging

Oefenopgaven Domein C1

Vraag 1
De afgeleide is kleiner dan nul en de tweede afgeleide is kleiner dan nul. Wat voor stijging heeft de grafiek?

Vraag 2
Lees de buigpunten en toppen af van de volgende grafiek. Bepaal ook wanneer het toenemend dalend/stijgend is of afnemend dalend/stijgend.



Vraag 3
Gegeven is de volgende functie:

$$f(x) = -2x^3 + 24x^2 - 42x + 3$$

Bereken de toppen van deze functie.

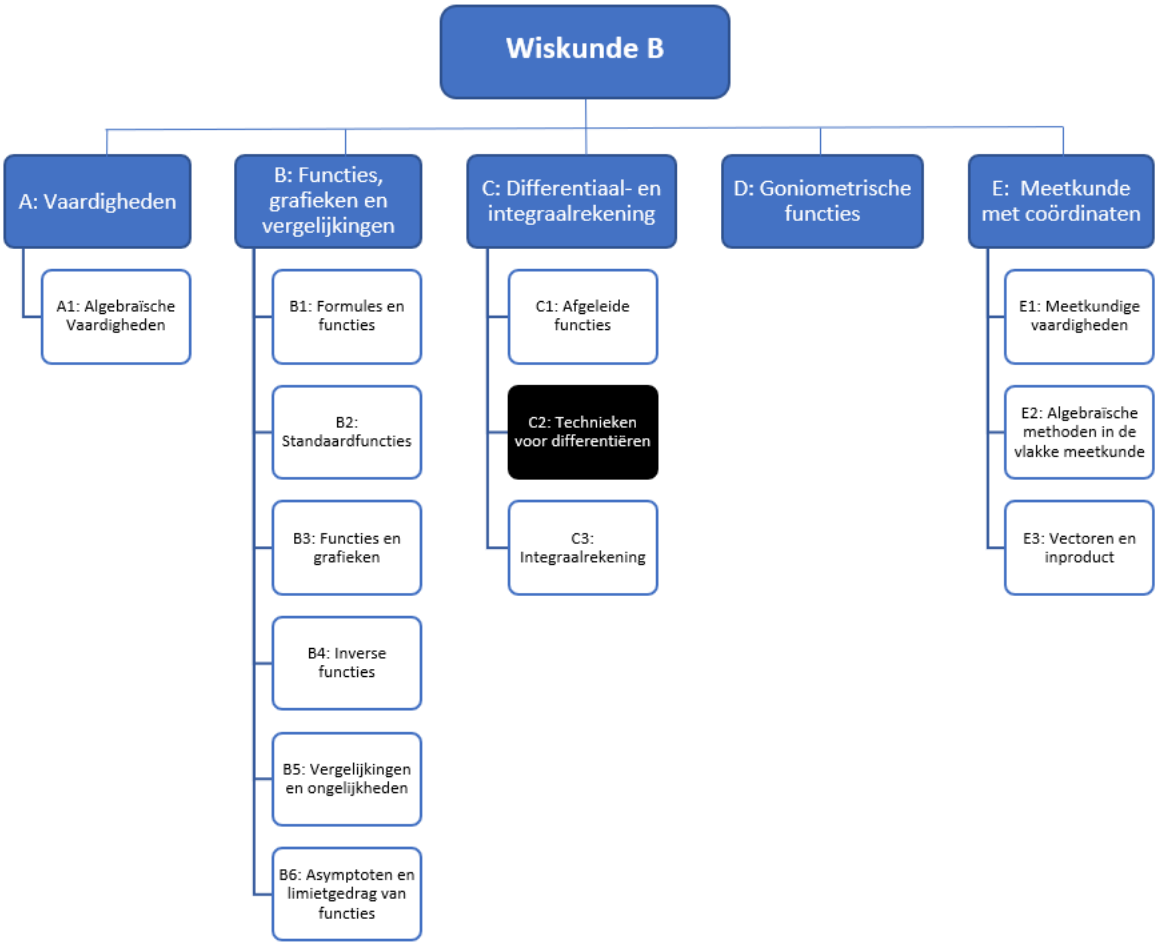
Vraag 4
Gegeven:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 5}$$

Onderzoek langs algebraïsche weg welk soort van daling er is in het punt $A\ (1{,}8)$.

Domein C2: Technieken voor differentiëren

Vakoverzicht



In dit subdomein ga je de eerste en tweede afgeleide van functies bepalen met behulp van de regels voor het differentiëren en daarbij algebraïsche technieken gebruiken. Er staan lekker veel voorbeeldopgaves in. Zo kun je goed oefenen!

Technieken voor differentiëren

Zoals we in het vorige subdomein al zagen, is differentiëren het berekenen van een afgeleide functie. Hiermee bereken je de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van een bepaald punt, want de richtingscoëfficiënt van een gebogen lijn bestaat niet. Zo kun je een bepaalde helling van een functie berekenen. Zie het zo: de aarde is een bolvorm, maar als je er overheen loopt lijkt het alsof je gewoon horizontaal loopt.

Er is een aantal rekenregels aan differentiëren verbonden, zodat je elke formule op dezelfde manier kunt behandelen. Houd je vast:

	Functie	**Afgeleide van de functie**	**Voorbeeld**	**Afgeleide van voorbeeld**
1	$f(x) = a$	$f'(x) = 0$	$f(x) = 5$	$f'(x) = 0$
2	$f(x) = ax$	$f'(x) = a$	$f(x) = 5x$	$f'(x) = 5$
3	$f(x) = ax^n$	$f'(x) = n * ax^{n-1}$	$f(x) = 4x^5$	$f'(x) = 20x^4$
4	$f(x) = g(x) + c$	$f'(x) = g'(x)$	$f(x) = 5x^2 + 10$	$f'(x) = 10x$
5	$f(x) = c * g(x)$	$f'(x) = c * g'(x)$	$f(x) = 5 * 6x^2$	$f'(x) = 5 * 12x$
6	$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x * \ln(a)$	$f(x) = 6^x$	$f'(x) = 6^x * \ln(6)$
7	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
8	$f(x) = {}^g\text{Log}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x * ln(g)}$	$f(x) = {}^5\text{Log}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x * ln(5)}$
9	$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
10	$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
11	$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
12	$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\text{Cos}^2(x)}$	$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\text{Cos}^2(x)}$

Ook is er een aantal standaardregels voor als er meerdere termen met elkaar gecombineerd zijn:

	Functie	**Afgeleide van de functie**	**Regel**
1	$y = f(x) + g(x)$	$y' = f'(x) + g'(x)$	Somregel
2	$y = f(x) - g(x)$	$y' = f'(x) - g'(x)$	Verschilregel
3	$y = f(x) * g(x)$	$y' = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$	Productregel
4	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \frac{g(x) * f'(x) - f(x) * g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$	Quotiëntregel
5	$y = f(g(x))$	$y' = f'\left(g(x)\right) * g'(x)$	Kettingregel

Zoals je ziet, wordt elke regel bij een ander type functie gebruikt. Hier nog wat extra uitleg over wanneer welke regel gebruikt wordt:

Somregel	Als in een functie twee termen worden opgeteld.
Verschilregel	Als in een functie twee termen worden afgetrokken.
Productregel	Als in een functie twee termen worden vermenigvuldigd.
Quotiëntregel	Als in een functie twee termen worden gedeeld.
Kettingregel	Als het een samengestelde functie is (een functie in een functie).

Voorbeeldopgave 1: Afgeleide

Vind de afgeleide van de volgende functie:

$$f(x) = 6x^4 + 5x^3 + 2x$$

Uitwerking

Gebruik:

$f(x) = ax^n$	$f'(x) = n * ax^{n-1}$

En de somregel:

$y = f(x) + g(x)$	$y' = f'(x) + g'(x)$

Differentiëren geeft dan:

$$f'(x) = 4 * 6x^{4-1} + 3 * 5x^{3-1} + 1 * 2x^{1-1}$$
$$f'(x) = 24x^3 + 15x^2 + 2$$

Voorbeeldopgave 2: Afgeleide

Vind de afgeleide van de volgende functie:

$$f(x) = (3x - 5)^3$$

Uitwerking

Gebruik:

Functie	Afgeleide
$\boldsymbol{f(x) = ax^n}$	$\boldsymbol{f'(x) = n * ax^{n-1}}$
$\boldsymbol{f(x) = ax}$	$\boldsymbol{f'(x) = a}$

En de kettingregel:

$f(x) = f(g(x))$	$f(x)' = f'\big(g(x)\big) * g'(x)$

Stel:

Functie	Afgeleide
$\boldsymbol{g(x) = (3x - 5)}$	$g'(x) = 3$
$\boldsymbol{f(g(x)) = g(x)^3}$	$f'(g(x)) = 3\ g(x)^2$

Invullen in de kettingregel geeft dan:

$$f'(x) = f'\big(g(x)\big) * g'(x) = 3\ g(x)^2 * 3$$

$g(x)$ invullen geeft:

$$f'(x) = 3 * (3x - 5)^2 * 3 = 9 * (3x - 5)^2$$

Voorbeeldopgave 3: Afgeleide

Vind de afgeleide van de volgende functie:

$$h(x) = x^2 - \ln(x)$$

Uitwerking

Gebruik:

Functie	Afgeleide
$\boldsymbol{f(x) = ax^n}$	$f'(x) = n * ax^{n-1}$
$\boldsymbol{f(x) = \ln(x)}$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

En de verschilregel:

$y = f(x) - g(x)$	$y' = f'(x) - g'(x)$

Stel:

Functie	Afgeleide
$\boldsymbol{f(x) = x^2}$	$f'(x) = 2x$
$\boldsymbol{g(x) = \ln(x)}$	$g'(x) = 1/x$

Invullen in de verschilregel geeft dan:

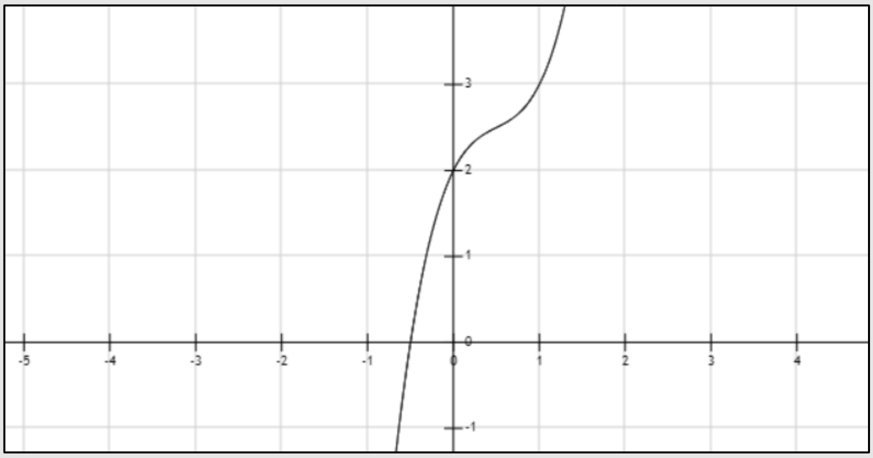
$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 2x - \frac{1}{x}$$

Dit makkelijk opschrijven geeft:

$$2x - \frac{1}{x} = \frac{2x * x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$$

Voorbeeldopgave 4: Buigpunt

Zoals je kunt zien in de volgende grafiek ligt het buigpunt op $x \approx 0{,}5$. Hier gaat de grafiek van afnemend stijgend naar toenemend stijgend.



Bepaal algebraïsch de coördinaten van het buigpunt. De functie van de grafiek:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 2$$

Uitwerking

Bij het buigpunt geldt dat $f''(x) = 0$. Dus we gaan eerst de afgeleide van de functie $f(x)$ berekenen en vervolgens deze afgeleide nog een keer differentiëren tot de tweede afgeleide.

De afgeleide van $f(x)$:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 2$$

De tweede afgeleide:

$$f''(x) = 12x - 6$$

Deze gelijkstellen aan nul geeft de x −coördinaat van het buigpunt:

$$f''(x) = 12x - 6 = 0$$

$$12x = 6$$

$$x = 0{,}5$$

Door x in de functie in te vullen bereken je de y-coordinaat van het buigpunt:

$$f(0{,}5) = 2 * 0{,}5^3 - 3 * 0{,}5^2 + 2 * 0{,}5 + 2 = 2{,}5$$

Dus het buigpunt bevindt zich op $(0{,}5, 2{,}5)$. Als je kijkt naar de grafiek kun je zien dat dit klopt!

Oefenopgaven Domein C2

Vraag 1
Vind de afgeleide van de volgende functie:

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 + x$$

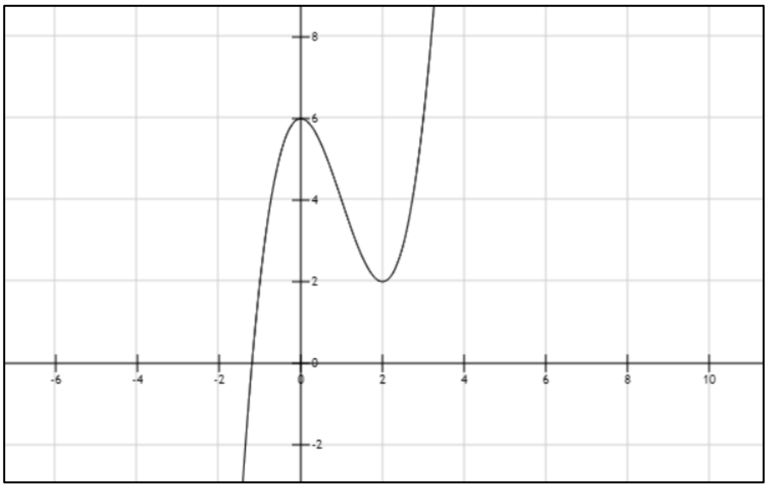
Vraag 2
Vind de afgeleide van de volgende functie:

$$f(x) = (4x - 2)^4$$

Vraag 3
Vind de afgeleide van de volgende functie:

$$h(x) = 5x^3 - \ln(x)$$

Vraag 4
Zoals je kunt zien in de volgende grafiek ligt het buigpunt op $x \approx 1$. Hier gaat de grafiek van toenemend dalend naar afnemend dalend.



Bepaal algebraïsch de coördinaten van het buigpunt. De functie van de grafiek:

$$f(x) = x^3 - 3 * x^2 + 6$$

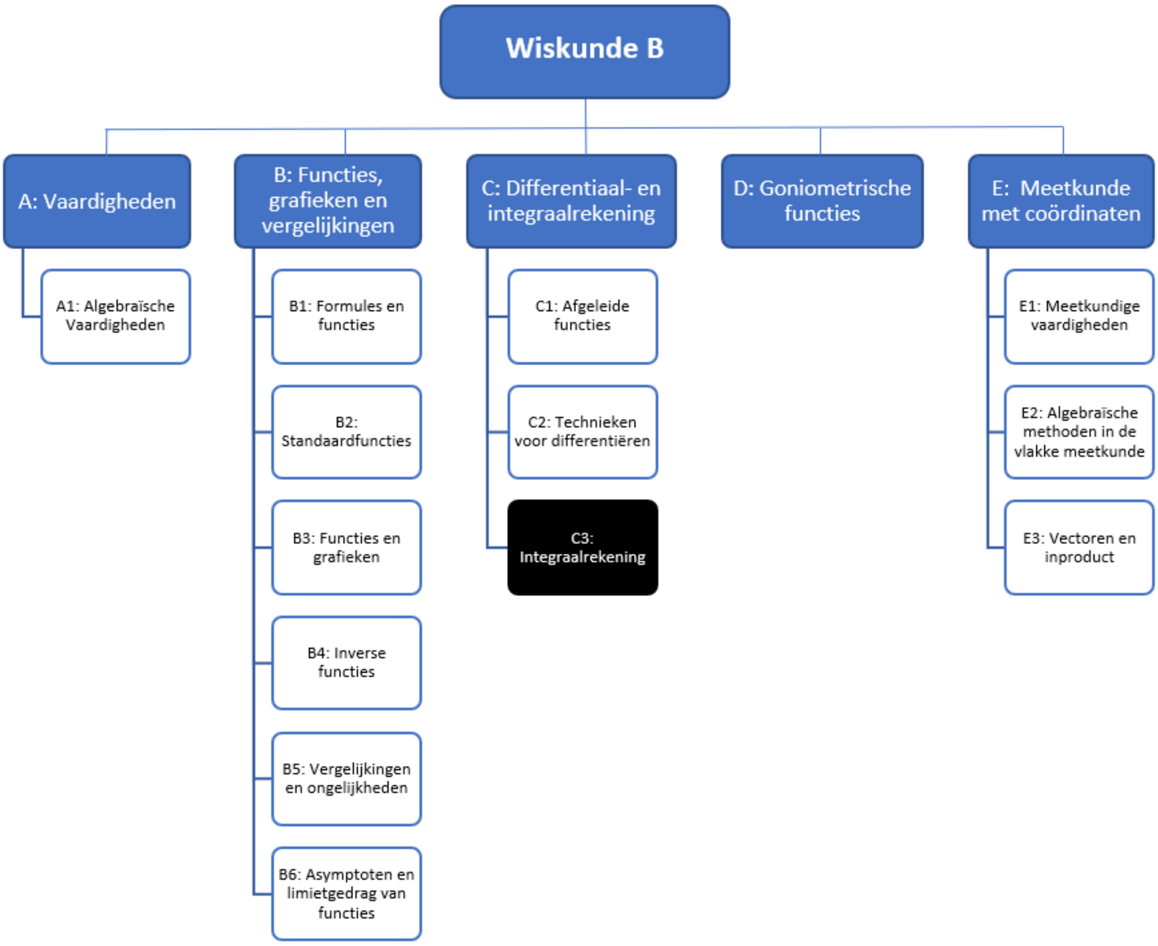
Vraag 5
Bereken exact voor welke waarden van a en b de grafiek van:

$$f(x) = ax^3 + 2x^2 + 5x + b$$

In het punt $(2,10)$ overgaat van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

Domein C3: Integraalrekening

Vakoverzicht



Dit is alweer het laatste subdomein van domein C. Na dit subdomein kun je in geschikte toepassingen een bepaalde integraal opstellen en exact berekenen. En dan gaat integreren en differentiëren al helemaal goed komen!

Integraalrekening

Primitiveren

Je kunt de afgeleide functie ook weer terugzetten naar de oorspronkelijke functie. Dit heet **primitiveren** en is dus het omgekeerde van differentiëren. De primitieve van een functie $f(x)$ schrijf je als volgt:

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

Een functie is dus een afgeleide van een primitieve. De volgende afbeelding maakt het nog extra duidelijk:

Differentiëren	Primitiveren
$F(x)$	$f'(x)$
↓	↓
$f(x)$	$f(x)$
↓	↓
$f'(x)$	$F(x)$

Ook voor primitiveren heb je standaard rekenregels. Dit zijn dezelfde regels als die je bij het differentiëren hebt geleerd, maar dan omgekeerd.

	Functie	Primitieve	Voorbeeld	Afgeleide van voorbeeld
1	$f(x) = a$	$F(x) = ax + C$	$f(x) = 5$	$F(x) = 5x + C$
2	$f(x) = ax^n$	$F(x) = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C$	$f(x) = 5x^2$	$F(x) = \frac{5}{3}x^3 + C$
3	$f(x) = g^x$	$F(x) = \frac{g^x}{\mathrm{Ln}(g)} + C$	$f(x) = 5^x$	$F(x) = \frac{5^x}{\mathrm{Ln}(5)} + C$
4	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$
5	$f(x) = 1/x$	$F(x) = \mathrm{Ln}\lvert x\rvert + C$	$f(x) = 1/x$	$F(x) = \mathrm{Ln}\lvert x\rvert + C$
6	$f(x) = \ln(x)$	$F(x) = xln(x) - x + C$	$f(x) = \ln(x)$	$F(x) = xln(x) - x + C$
7	$f(x) = {}^{g}\mathrm{Log}\,(x)$	$F(x) = \frac{1}{\mathrm{Ln}(g)}(xln(x) - x) + C$	$f(x) = {}^{5}\mathrm{Log}\,(x)$	$F(x) = \frac{1}{\mathrm{Ln}(5)}(xln(x) - x) + C$
8	$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\mathrm{Cos}(x) + C$	$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\mathrm{Cos}(x) + C$
9	$f(x) = \cos(\mathrm{x})$	$f(x) = \mathrm{Sin(X)} + C$	$f(x) = \cos(\mathrm{x})$	$f(x) = \mathrm{Sin(X)} + C$

Deze rekenregels worden nogmaals toegelicht in het filmpje hiernaast.

Zoals je kunt zien in de tabel komt bij elke primitieve nog wel een constante, $C.C$ wordt ook wel de **integratieconstante** genoemd en is nodig omdat de afgeleide van een heel getal nul is, maar dit kun je niet weer terugprimitiveren. We leggen het even uit met behulp van een voorbeeld:

Differentiëren: $f(x) = 5x^2 + 6x + 20 \rightarrow f'(x) = 10x + 6$

Primitiveren: $f'(x) = 10x + 6 \rightarrow f(x) = 5x^2 + 6x + C$

Zoals je ziet missen we het getal 20 als we de functie gaan terug primitiveren, vandaar dat er altijd een constante staat om aan te tonen dat hier rekening mee is gehouden.

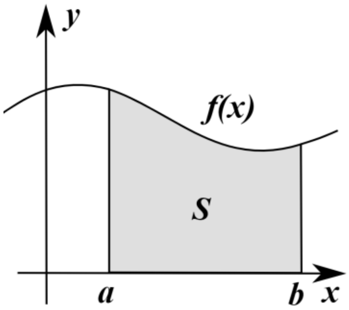
Oppervlakte onder een grafiek

Oppervlakte tussen een grafiek en de x-as

Als je een oppervlak tussen een bepaalde functie en de x-as wilt berekenen kun je dit doen door de integraal van die functie te nemen:

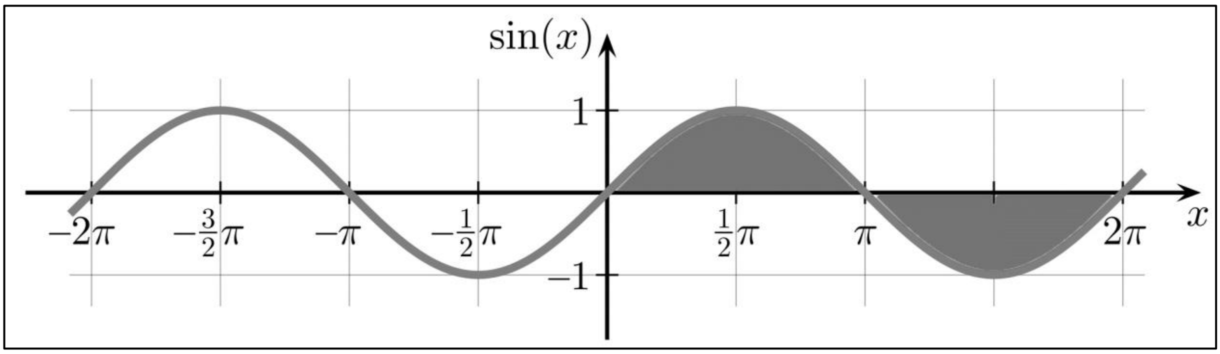
$$S = \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

In deze formule is S de oppervlakte tussen de grafiek en de x-as en zijn a en b de waardes van x waartussen je de oppervlakte wilt nemen.



Het filmpje laat overzichtelijk zien hoe de oppervlakte wordt berekend.

Let op! Als je de oppervlakte tussen de grafiek en de x –as wilt berekenen van een functie die ook negatief gaat (bijvoorbeeld een sinus), heb je te maken met een negatieve oppervlakte vanaf $x = \pi$:



Omdat je de oppervlaktes bij elkaar wilt optellen moet je hier gebruik maken van de volgende integraal, waarbij je dus gebruik maakt van absoluut-tekens:

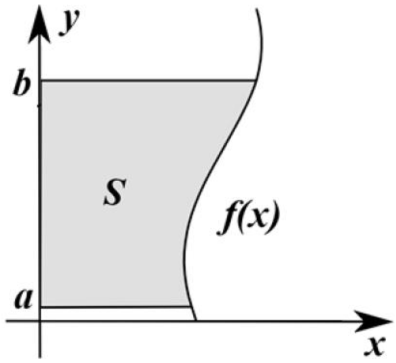
$$S = \int_a^b |f(x)\,|dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Oppervlakte tussen een grafiek en de y-as

Als je een oppervlak tussen een bepaalde functie en de y-as wilt berekenen kun je dit doen door de integraal van die functie te nemen:

$$S = \int_a^b f(y)\, dy = [F(y)]_a^b = F(b) - F(a)$$

In deze formule is S de oppervlakte tussen de grafiek en de y-as en zijn a en b de waardes van y waartussen je de oppervlakte wilt nemen.



Om deze oppervlakte te bepalen moet je dus eerst de grafiek van x omschrijven naar $f(y)$. Dit doe je als volgt, stel:

$$f(x) = 5x + 2$$

$$y = 5x + 2 \rightarrow \quad x = \frac{1}{5}y - \frac{2}{5}$$

Invullen in de integraal geeft:

$$S = \int_a^b f(y)\, dy = \int_a^b \left(\frac{1}{5}y - \frac{2}{5}\right) dy = [\frac{1}{10}y^2 - \frac{2}{5}y]_a^b$$

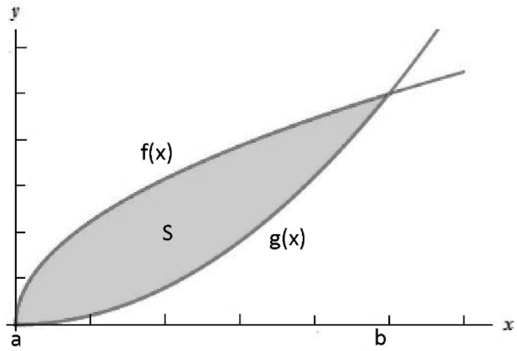
Oppervlakte tussen twee grafieken

Als je het oppervlak tussen twee verschillende grafieken wilt berekenen moet je gebruik maken van de volgende functie:

$$S = \int_a^b z(x)\, dx$$

Waarin:
$S = oppervlakte$

$$z(x) = bovenste\ functie\ f(x) - onderste\ functie\ g(x)$$



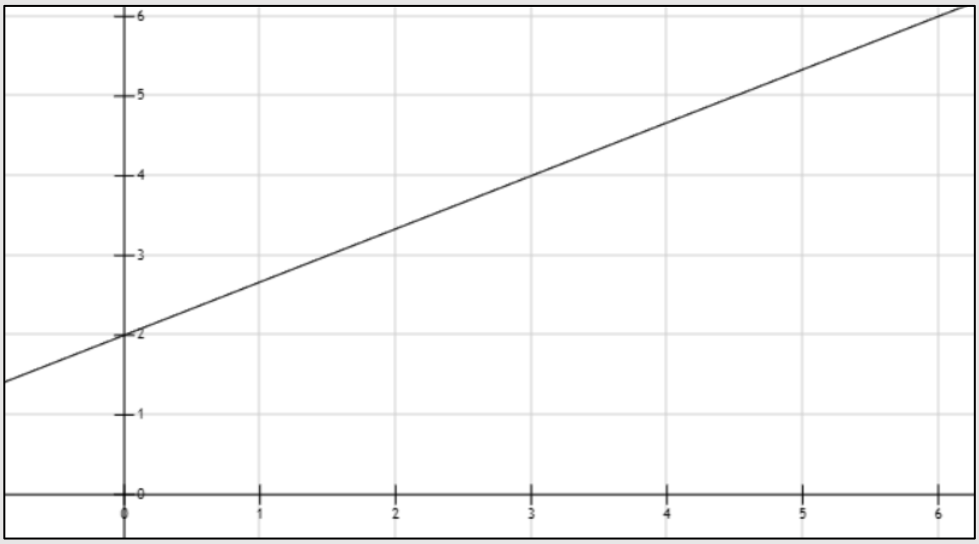
Nog onduidelijk? Kijk dan deze video waarin het stap voor stap wordt uitgelegd!

Voorbeeldopgave 5: Oppervlakte tussen grafiek en x-as en y-as

Gegeven is de volgende formule/grafiek:

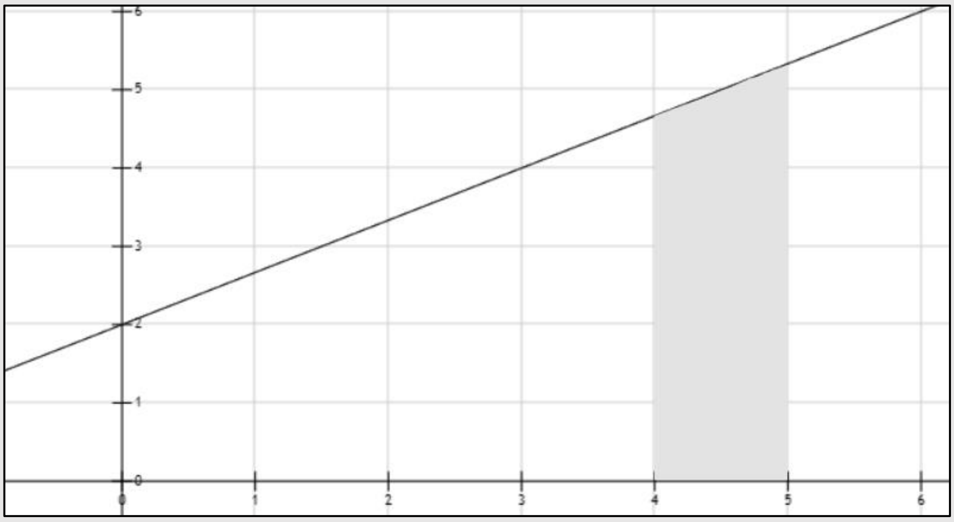
$$f(x) = \frac{2}{3}x + 2$$

a. Bepaal de oppervlakte tussen de grafiek en de x-as bij tussen punten $x = 4$ en $x = 5$.
b. Bepaal de oppervlakte tussen de grafiek en de y-as bij tussen punten $y = 4$ en $y = 5$.



Uitwerking

a.

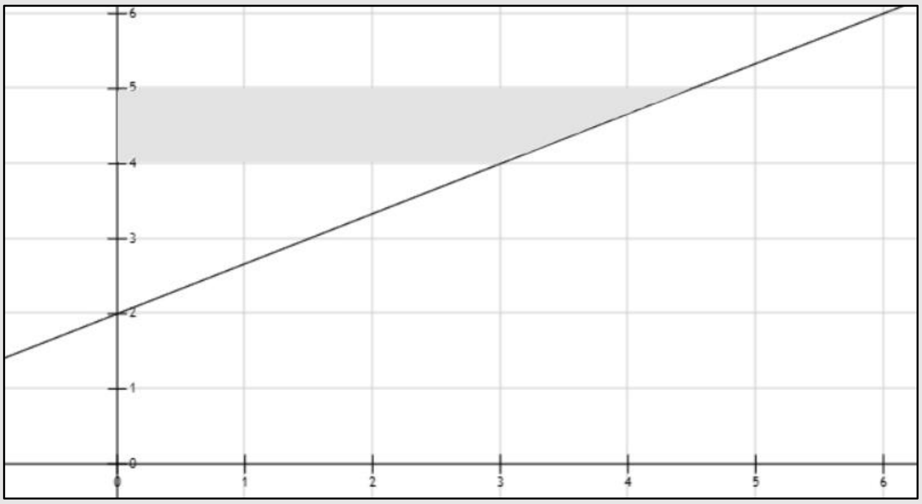


Als je een oppervlak tussen een bepaalde functie en de x-as wilt berekenen kun je dit doen door de integraal van die functie te nemen:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = \int_4^5 \left(\frac{2}{3}x + 2\right) dx = [\frac{2}{6}x^2 + 2x]_4^5 = \left(\frac{1}{3} * 5^2 + 2 * 5\right) - \left(\frac{1}{3} * 4^2 + 2 * 4\right) = 5$$

Als je de bovenstaande grafiek bekijkt, zie je dat dit klopt.

b.



Om deze oppervlakte te bepalen moet je dus eerst de grafiek van x omschrijven naar $f(y)$. Dit doe je als volgt:

$$f(x) = \frac{2}{3}x + 2$$

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

$$y - 2 = \frac{2}{3}x$$

$$x = \frac{3}{2}y - \frac{6}{2}$$

$$x = 1{,}5y - 3$$

Invullen in de integraal geeft:

$$S = \int_a^b f(y)\,dy =$$

$$\int_4^5 (1{,}5y - 3)\,dy =$$

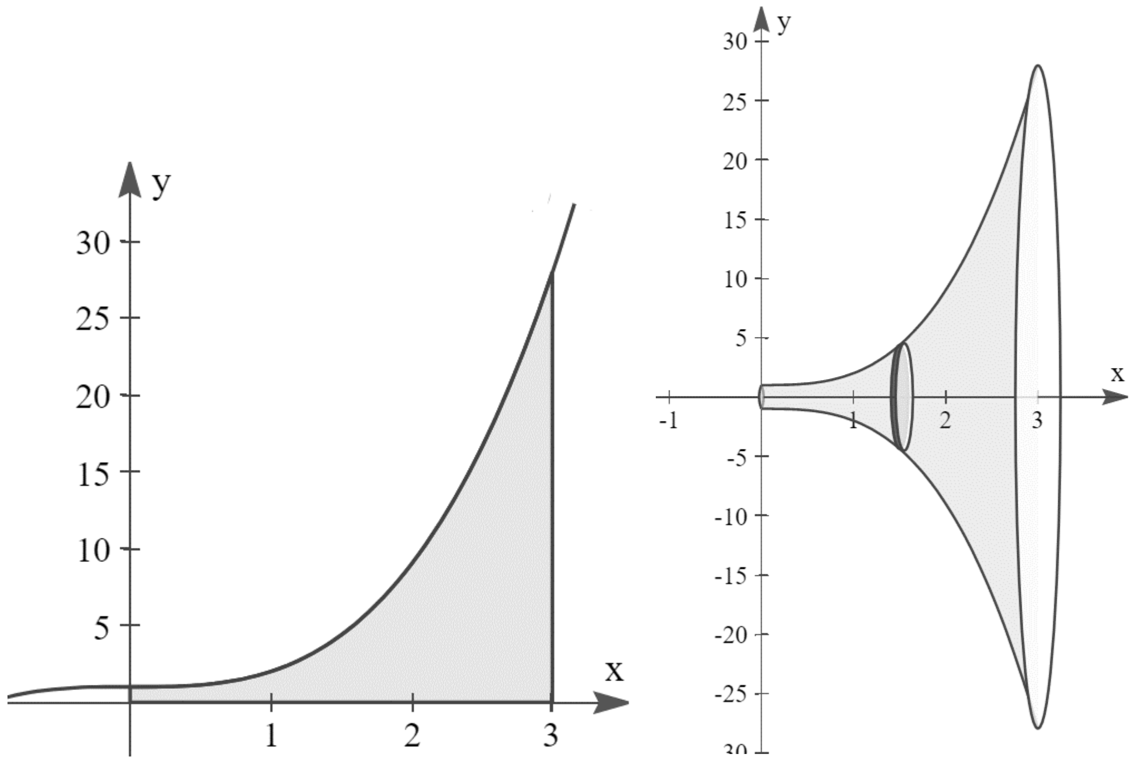
$$[\frac{3}{4}y^2 - 3y]_4^5 =$$

$$\left(\frac{3}{4} * 5^2 - 3 * 5\right) - \left(\frac{3}{4} * 4^2 - 3 * 4\right) = \frac{15}{4}$$

Als je de bovenstaande grafiek bekijkt, zie je dat dit klopt.

Inhoud van een grafiek

Een omwentelingslichaam is een 3D-lichaam dat ontstaat door omwenteling van een bepaalde functie om een rechte lijn. Hier een voorbeeld wat er gebeurt als je een simpele grafiek om de x-as wentelt:



Wentelen om de x - as

Om de inhoud te berekenen van een 2D-parabool ($f(x) = x^2$) die om de x-as wentelt, kun je de volgende formule gebruiken:

$$Inhoud = \int_a^b \pi * \left(f(x)\right)^2 dx = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx = \pi \int_a^b (x^2)^2 dx = \pi \int_a^b x^4\, dx$$

Video WisBV-C3-4

Hier heb je nog een video aan de hand van een voorbeeld!

Wentelen om de y - as

Om de inhoud te berekenen van een 2D-parabool ($f(x) = x^2$) die om de y-as wentelt, kun je de volgende formule gebruiken:

$$Inhoud = \int_a^b \pi * x^2 dy = \pi \int_a^b x^2 dy$$

Waar:

$$y = x^2$$

Dus:

$$x = \sqrt{y}$$

Invullen geeft:

$$Inhoud = \int_a^b \pi * x^2 dy = \pi \int_a^b x^2 dy = \pi \int_a^b \sqrt{y}^2 dy = \pi \int_a^b y\, dy$$

Ook voor wentelen om de y-as hebben we een mooie video voor je klaarstaan!

Wentelen tussen twee grafieken

Om de inhoud te berekenen van een 2D parabool die om de x-as wentelt kun je de volgende formule gebruiken:

$$Inhoud = \int_a^b \pi * \left(f(x)\right)^2 dx - \int_a^b \pi * \left(g(x)\right)^2 dx = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx - \pi \int_a^b \left(g(x)\right)^2 dx$$

Waar:

$$f(x) = buitenste\ functie$$

$$g(x) = binnenste\ functie$$

Om de inhoud te berekenen van een 2D parabool die om de y-as wentelt, kun je de volgende formule gebruiken:

$$Inhoud = \int_a^b \pi * x^2 dy - \int_a^b \pi * x^2 dy = \pi \int_a^b x^2 dy - \pi \int_a^b x^2 dy$$

Waar:

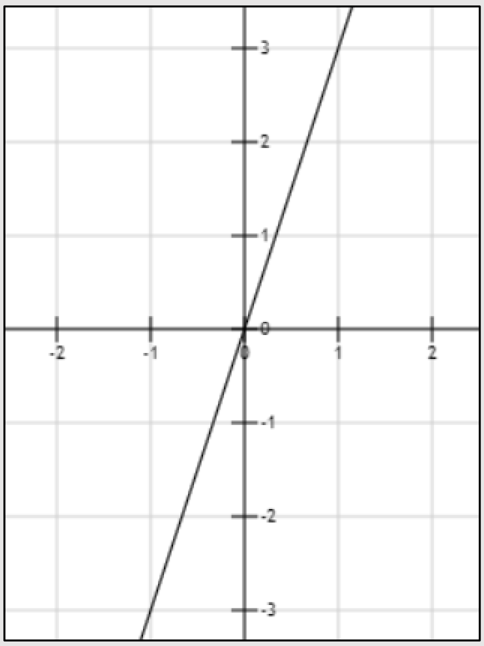
$$f(x) = buitenste\ functie$$

$$g(x) = binnenste\ functie$$

Voorbeeldopgave 6: Inhoud van een omwentelingslichaam

Gegeven is de volgende formule/grafiek:

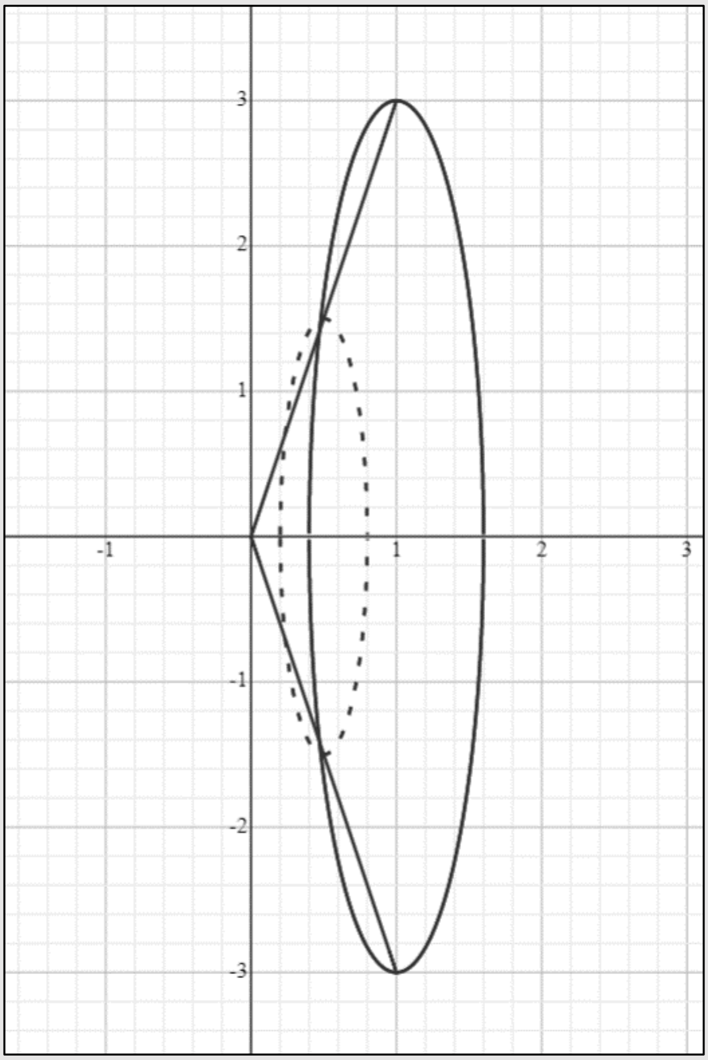
$y = 3x$



a. Bereken het volume van het omwentelingslichaam om de x-as tussen $x = 0$ en $x = 1$.
b. Bereken het volume van het omwentelingslichaam om de y-as tussen $x = 0$ en $x = 1$.

Uitwerking

a. Als je de functie om de x-as draait tussen $x = 0$ en $x = 1$ krijg je deze grafiek:



Om de inhoud te berekenen van een grafiek die om de x-as wentelt, kun je de volgende formule gebruiken:

$$Inhoud = \int_a^b \pi * \left(f(x)\right)^2 dx = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$

$f(x) = 3x$ invullen:

$$Inhoud = \pi \int_a^b (3x)^2 dx = \pi \int_a^b 9x^2 dx$$

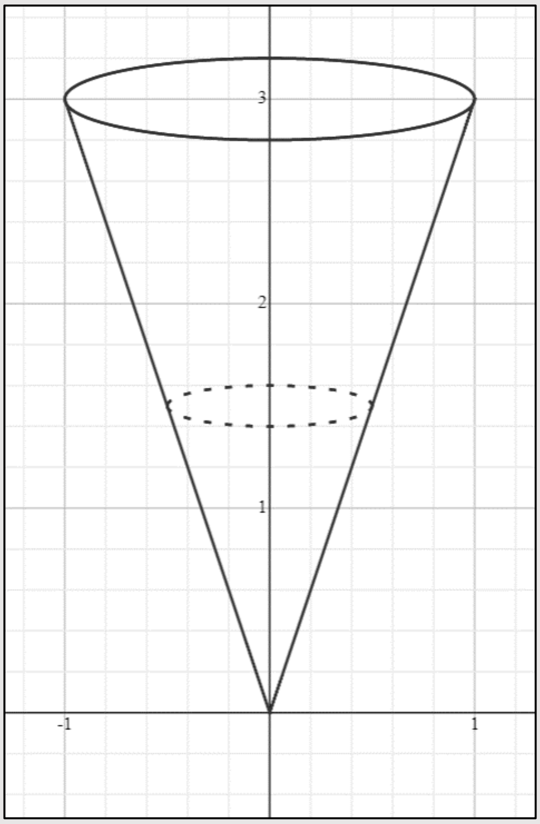
$x = 0$ en $x = 1$ invullen en de primitieve berekenen geeft:

$$Inhoud = \pi \int_0^1 9x^2 dx = \pi * [\frac{9}{3}x^3]_0^1 = \pi * [3x^3]_0^1$$

$x = 0$ en $x = 1$ invullen:

$$Inhoud = \pi * [3x^3]_0^1 = \pi * (3 * 1^3 - 3 * 0^3) = 3\pi$$

b. Als je de functie om de y-as draait tussen $x = 0$ en $x = 1$ krijg je deze grafiek:



Om de inhoud te berekenen van een grafiek die om de y-as wentelt, kun je de volgende formule gebruiken:

$$Inhoud = \int_a^b \pi * x^2 dy = \pi \int_a^b x^2 dy$$

$y = 3x \rightarrow x = \frac{1}{3}y$ invullen geeft:

$$Inhoud = \pi \int_a^b \left(\frac{1}{3}y\right)^2 \ dy = \pi \int_a^b \frac{1}{9}y^2 \ dy$$

$x = 0 \rightarrow y = 3x = 3 * 0 = 0$

$x = 1 \rightarrow y = 3x = 3 * 1 = 3$

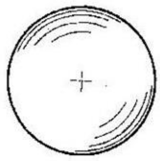
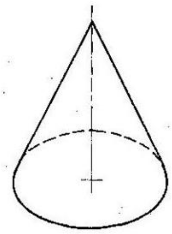
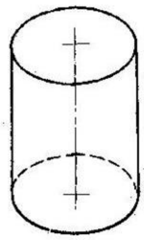
$y = 0$ en $y = 3$ invullen en de primitieve berekenen geeft:

$$Inhoud = \pi \int_0^3 \frac{1}{9}y^2 \ dy = \pi * [\frac{1}{27}x^3]_0^3$$

$x = 0$ en $y = 3$ invullen:

$$Inhoud = \pi * [\frac{1}{27}x^3]_0^3 = \pi * \left(\frac{1}{27} * 3^3 - \frac{1}{27} * 0^3\right) = \pi$$

Door middel van deze functies kun je de inhoud van vele vormen vinden. Een paar standaardvormen zijn bijvoorbeeld:

	inhoud	vorm
bol	$I = \frac{4}{3} * \pi r^3$	
kegel	$I = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	
cylinder	$I = \pi r^2 h$	

Grafische rekenmachine

Met je GR kun je ook al het bovenstaande berekenen. Superhandig, want zo kun je narekenen of je een som goed hebt opgelost!

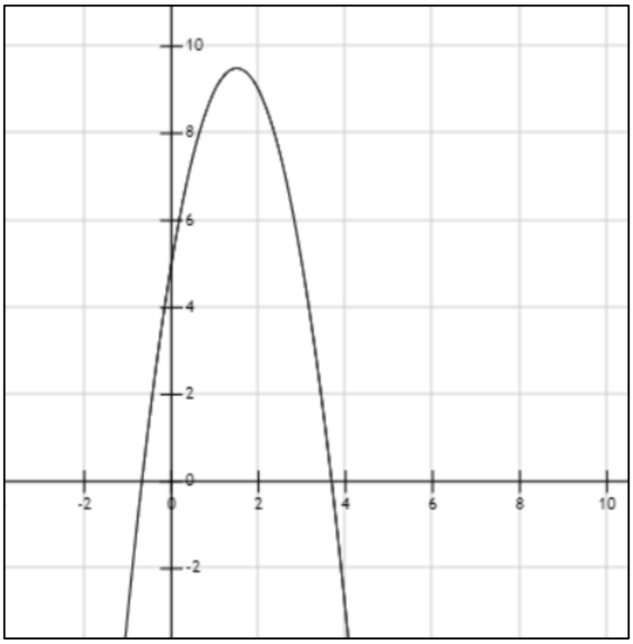
Dit doe je als volgt:

1. Ga naar het *calc* menu (toets [2nd] [*trace*]).
2. Klik dan op stapje 7: $[\int f(x)dx]$.
3. Vul bij $[y =]$ de formule in waarvan je de integraal wilt berekenen.
4. Vul bij [*lower limit*] de onderste grenswaarde in.
5. Vul bij [*upper limit*] de bovenste grenswaarde in.
6. Druk op [*enter*] en om de oppervlakte onder de grafiek te krijgen!

Oefenopgaven Domein C3

Vraag 1
Gegeven is de volgende formule/grafiek:

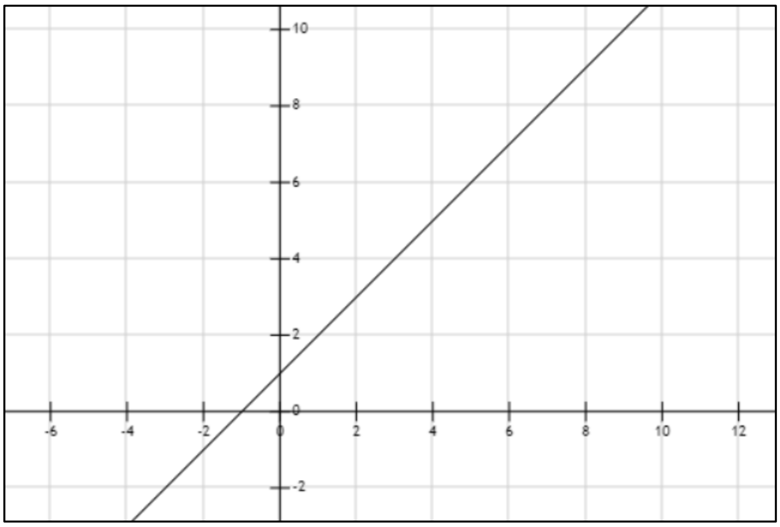
$$f(x) = -2x^2 + 6x + 5$$



Bepaal de oppervlakte tussen de grafiek en de x-as tussen punten $x = 0$ en $x = 2$.

Vraag 2
Gegeven is de volgende formule/grafiek:

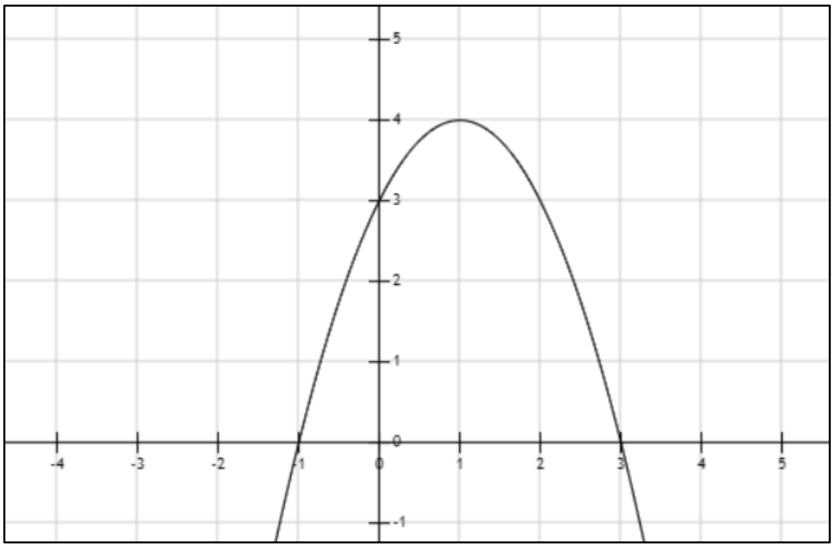
$$y = x + 1$$



Bereken het volume van het omwentelingslichaam om de x-as tussen $x = 0$ en $x = 2$.

Vraag 3
Bepaal de oppervlakte tussen f en de x –as.

$$f(x) = 3 + 2x - x^2$$

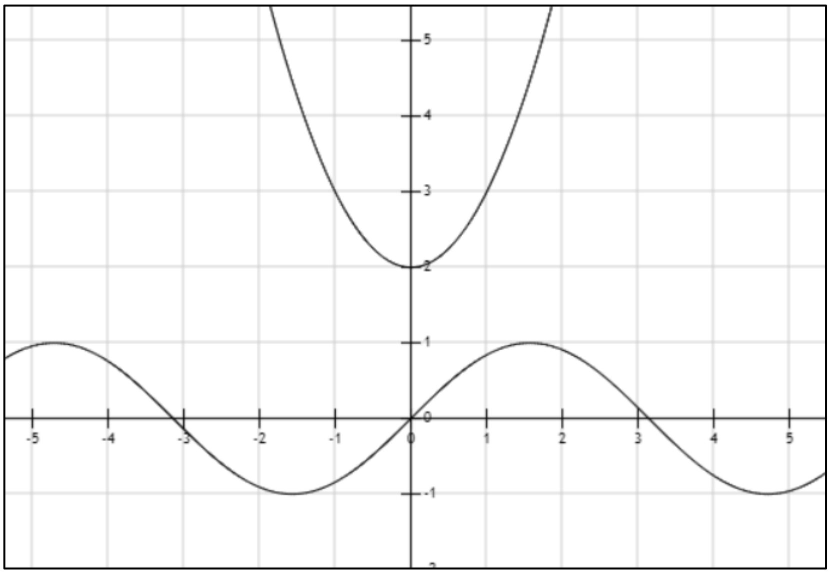


Vraag 4
Bepaal de oppervlakte tussen f en g:

$$f(x) = x^2 + 2$$

$$g(x) = \sin(x)$$

Tussen $x = -1$ en $x = 2$.

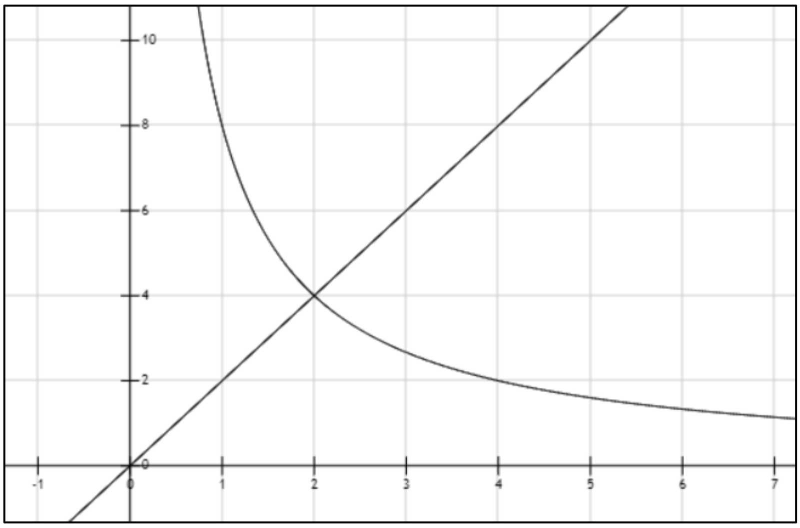


Vraag 5
Bepaal de oppervlakte tussen het snijpunt van f en g:

$$f(x) = \frac{8}{x}$$

$$g(x) = 2x$$

En tussen $x = 4$.

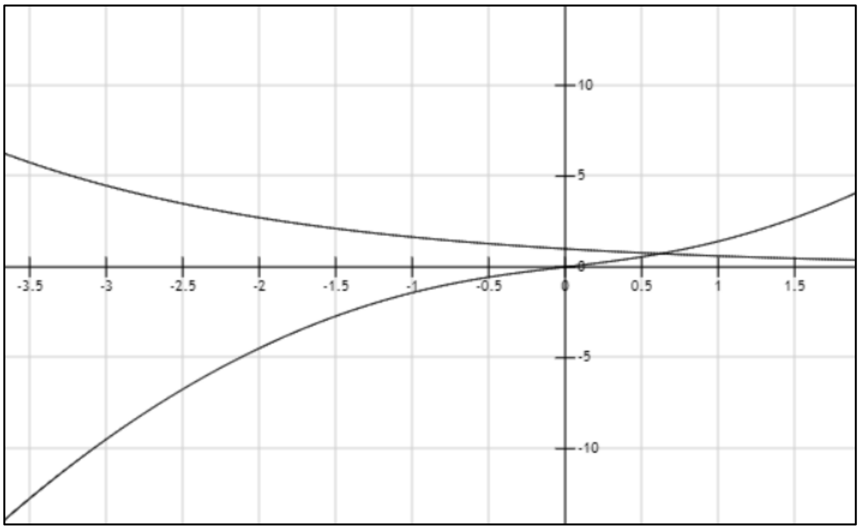


Vraag 6
Bepaal de oppervlakte tussen f en g:

$$f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$$

$$g(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$$

Tussen $x = -3 \; en \; de \; y - as$.



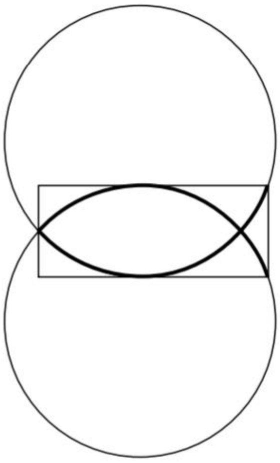
Afsluiting

Lekker bezig! Dit was alweer domein C. Je bent nu over de helft!! In de volgende domeinen gaan we aan de slag met goniometrische functies en meetkunde met coördinaten. Dat gaat helemaal goed komen!

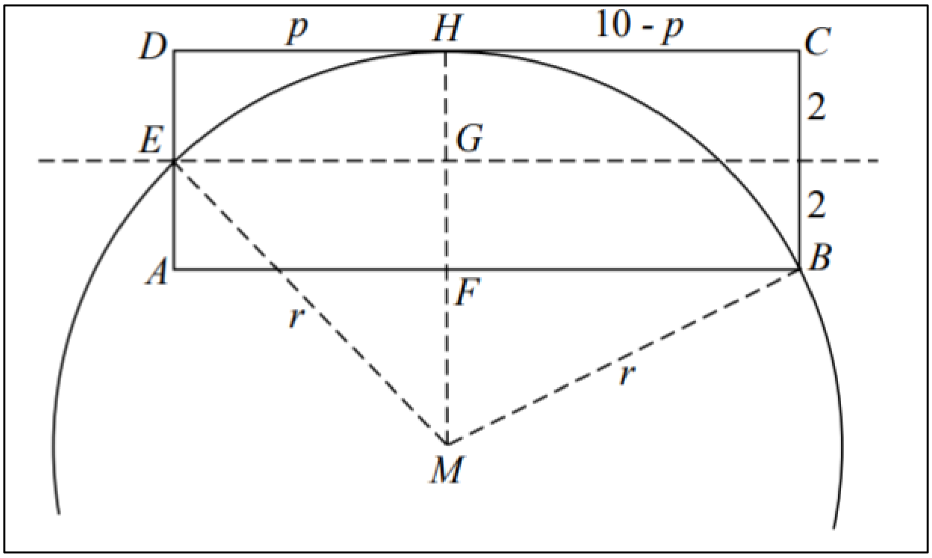
Oefenopgaven Domein C

Vraag 1 (examenopgave 2009-II - vraag 15)

In het verkeer zie je regelmatig auto's met bumperstickers. Een veel voorkomende sticker is er een in de vorm van een visje zoals te zien is op de foto. Dit visje is opgebouwd uit twee even grote cirkelbogen die in een gemeenschappelijk punt beginnen en elkaar in een tweede punt snijden. Zie figuur. Ook is in deze figuur te zien dat het visje precies wordt omsloten door een rechthoek.



In deze opgave wordt nagegaan hoe een visje getekend kan worden dat in een rechthoek past met een breedte van 10 cm en een hoogte van 4 cm. Om het visje te kunnen tekenen, is het nodig te weten wat de straal is van de bijbehorende cirkelbogen. Ook moet de positie van de middelpunten van de cirkelbogen ten opzichte van de rechthoek bekend zijn. In het volgende figuur zijn de rechthoek en een deel van de onderste cirkel getekend.



Er geldt het volgende:

- $AB = CD = 10\,cm$
- $AD = BC = 4\,cm$
- E is het midden van AD
- G is het midden van FH
- $DH = EG = AF = p\,cm$
- De straal van de cirkelboog is r cm.

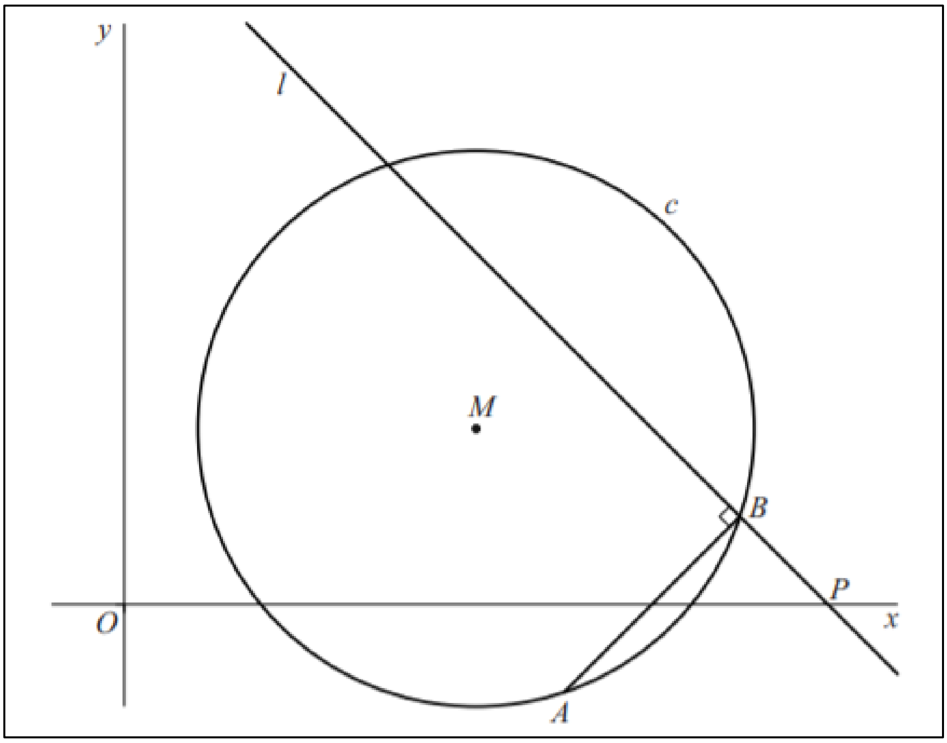
Met behulp van de stelling van Pythagoras in driehoek MGE kan een vergelijking worden opgesteld.Deze vergelijking kan vervolgens worden omgewerkt tot:

$$r = \frac{1}{4} * p^2 + 1$$

Stel de gevraagde vergelijking op en werk deze om tot:

$$r = \frac{1}{4} * p^2 + 1$$

Vraag 2 (examenopgave 2015-I - vraag 6)
Gegeven is cirkel c met middelpunt $M(4, 2)$. Op c liggen de punten $A(5, 1) -$ en $B(7,1)$. Lijn l gaat door B en staat loodrecht op lijnstuk AB. Punt P is het snijpunt van l met de x –as.



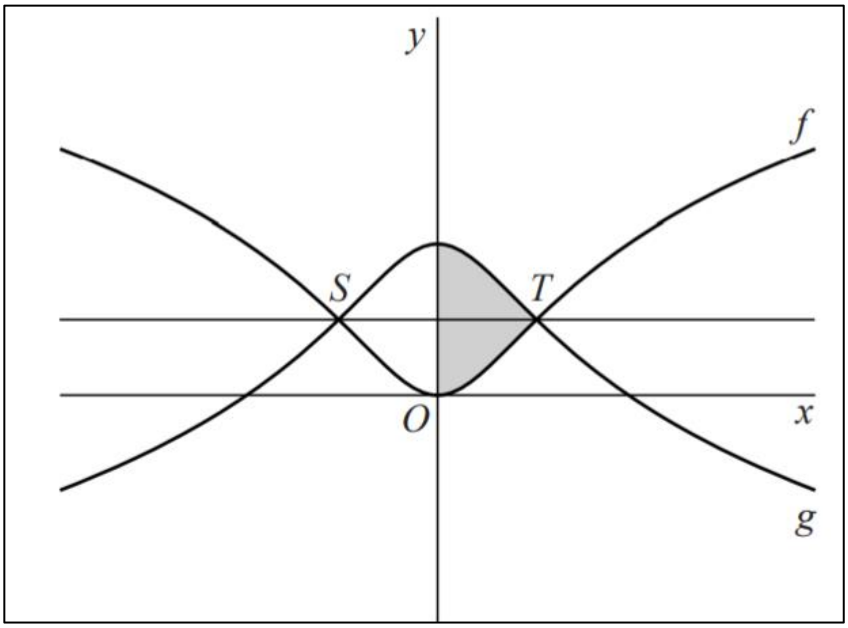
Bereken exact de afstand van P tot c.

Vraag 3 (examenopgave 2016 II – vraag 10 (pilot))
De functies f en g worden gegeven door:

$$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

$$g(x) = \ln\left(\frac{e^2}{x^2 + 1}\right)$$

De grafiek van f en g snijden elkaar in punt S en T. De grafieken f en g zijn elkaars gespiegelde in de lijn met vergelijking $y = 1$. In het volgende figuur is het gebied rechts van de y-as dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g en de y –as, grijsgemaakt.



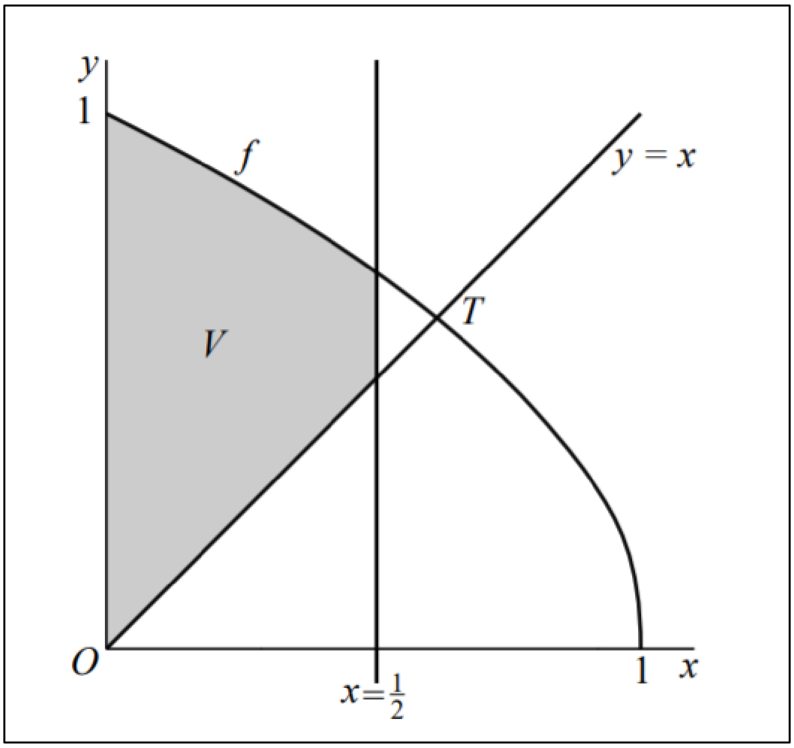
Dit gebied wordt gewenteld om de y-as.
Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.

Vraag 4 (examenopgave 2011 I – vraag 3)
De functie f is gegeven door:

$$f(x) = \sqrt{1-x}$$

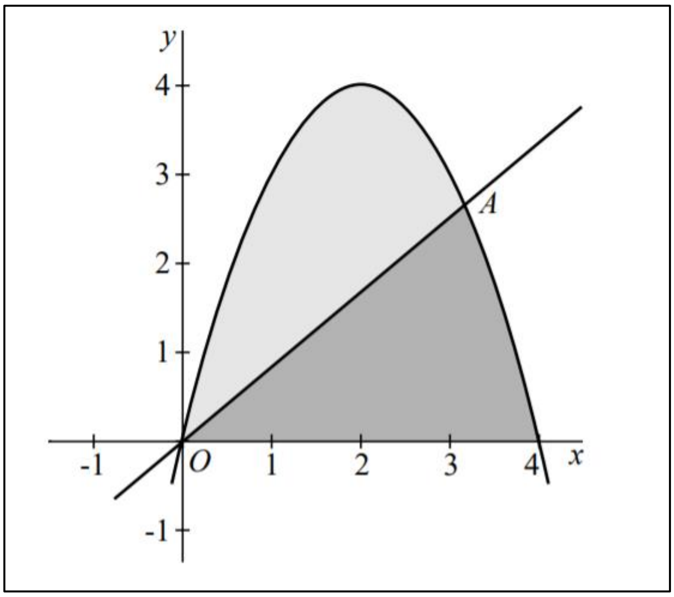
Het gebied V wordt begrensd door de grafiek van f, de y –as, de lijn $y = x$ en de lijn $x = 1/2$.

Zie figuur:



Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat wanneer V om de x-as wordt gewenteld.

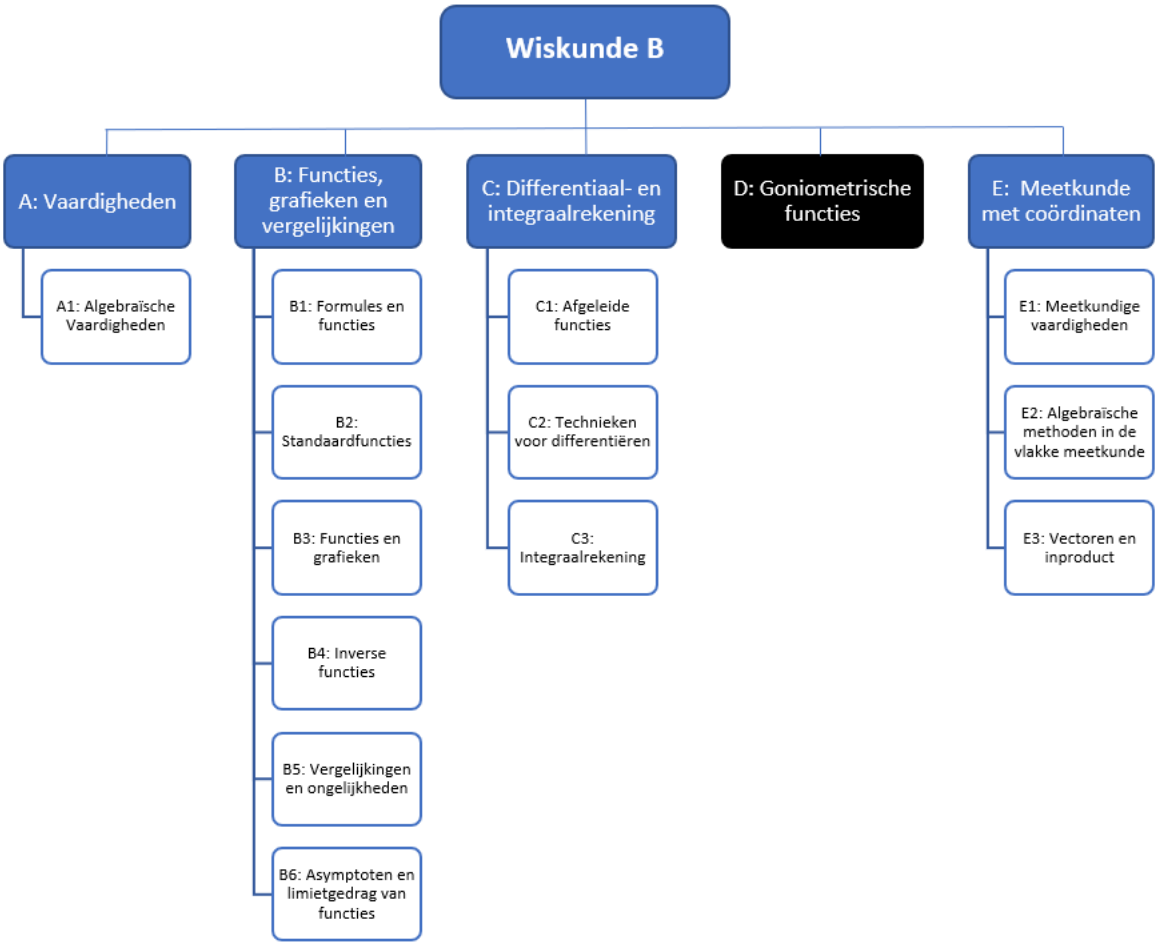
Vraag 5 (examenopgave 2010 I – vraag 2)
De parabool met vergelijking $y = 4x - x^2$ en de x –as sluiten een vlakdeel V in. De lijn $y = ax$ (met $0 \leq a < 4$) snijdt de parabool in de oorsprong O en in punt A. Zie volgend figuur:



A heeft de coördinaten $(4 - a\,, 4a - a^2)$. Het deel van V boven de lijn OA heeft oppervlakte $\frac{1}{6} * (4 - a)^3$. Toon dit exact aan.

Domein D: Goniometrische functies

Vakoverzicht

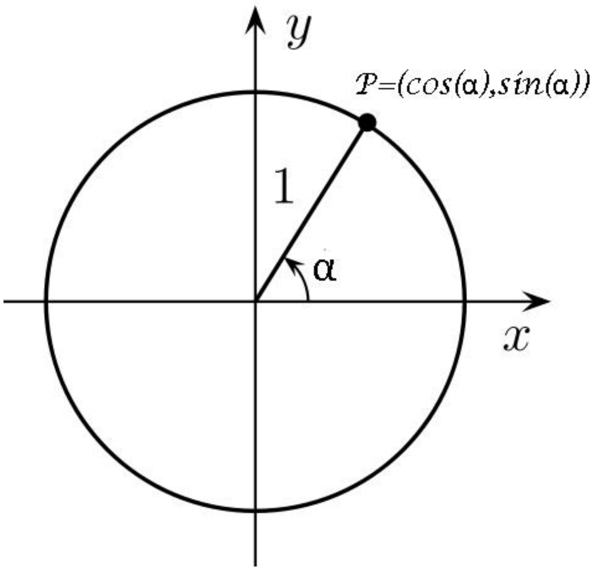


We zijn alweer aangekomen bij domein D! Hierin leer je hoe je formules moet bewerken en opstellen bij periodieke verschijnselen, de bijbehorende grafieken tekenen, vergelijkingen oplossen en hierbij de periodiciteit met inzicht gebruiken. Succes!

Goniometrische functies

Goniometrische functies zijn functies die gebruikt worden om verhoudingen in driehoeken te bepalen. Hierin komen $sin(x)$, $cos(x)$ en $tan(x)$ voor.

In de goniometrie wordt er ook gebruik gemaakt van een eenheidscirkel. Deze cirkel heeft een straal van 1 en een oorsprong op het punt $(0,0)$. Punt P loopt over deze cirkel met een draaiingshoek α:



Zoals je kunt zien in de eenheidscirkel geldt voor de coördinaten van punt P:

$$x_p = \cos{(\alpha)}$$

$$y_p = \sin(\alpha)$$

$$\frac{y_p}{x_p} = \tan{(\alpha)}$$

De <u>x-waarde</u> van de coördinaat is dus de <u>cosinus</u> van een bepaalde hoek α en de <u>y-waarde</u> van de coördinaat is de <u>sinus</u> van een bepaalde hoek α. Voor de tangensfunctie geldt dus het volgende:

$$tan(\alpha) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$$

Door de coördinaten van punt P te volgen krijg je uiteindelijk te zien hoe punt P over de cirkel loopt in de vorm van een sinusoïde.

Nog niet helemaal zeker van je zaak? Kijk dan deze video.

Video WisBV-D1-1

Bij een eenheidscirkel wordt er gebruik gemaakt van **radialen** in plaats van graden. De omtrek van de hele eenheidscirkel is 360 graden. Dit is hetzelfde als 2π rad. Dit komt doordat een straal (r) van een eenheidscirkel altijd 1 is.

$$omtrek = 2\pi * r = 2\pi * 1 = 2\pi$$

Omrekenen graden naar radialen

Als je het aantal radialen wilt weten, maar je weet alleen het aantal graden dan gebruik je de volgende formule:

$$Aantal\ radialen = \frac{Aantal\ graden}{360} * 2\pi$$

Omrekenen radialen naar graden

Als je het aantal graden wilt weten, maar je weet alleen het aantal radialen, dan gebruik je de volgende formule:

$$Aantal\ graden = \frac{Aantal\ radialen}{2\pi} * 360$$

Om de coördinaten van de draaiingshoek α te bepalen moet je dus het aantal radialen invullen in $cos(\alpha)$ voor de x-coördinaten en in de $sin(\alpha)$ voor de y-coördinaten:

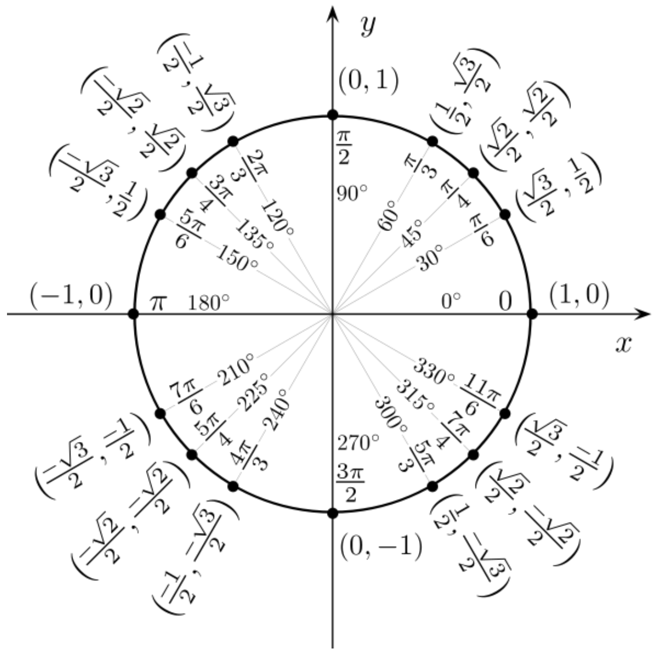
$$x = cos(\alpha)$$

$$y = sin(\alpha)$$

Hier is een makkelijke omrekentabel waarin je meteen kunt zien wat de coördinaten zijn bij een bepaalde draaiingshoek:

Draaiingshoek **α in graden**	0	30	45	60	90	180	270	360
Draaiingshoek **α in radialen**	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y-coördinaat $sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	-1	0
x-coördinaat $cos(\alpha)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
y/x $tan(\alpha)$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	Niet mogelijk	0	Niet mogelijk	0

Deze tabel kun je ook in de vorm van een eenheidscirkel schrijven. Dan krijg je de **exacte waarden-cirkel:**



Als je deze cirkel goed bestudeert, dan kun je allemaal dingen zien. Ga eens op ontdekking wat je er allemaal van af kunt lezen en bekijk daarna de volgende regels!

Symmetrieformules
$\mathbf{sin}(-\alpha) = -\mathbf{sin}\ (\alpha)$
$\mathbf{cos}(-\alpha) = cos\ (\alpha)$
$\mathbf{tan}\ (-\alpha) = -tan\ (\alpha)$
$\mathbf{sin}(\pi - \alpha) = \mathbf{sin}\ (\alpha)$
$\mathbf{cos}(\pi - \alpha) = cos\ (\alpha)$
$\mathbf{tan}\ (\pi - \alpha) = tan\ (\alpha)$
Verbanden
$\mathbf{sin}\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = cos(\alpha)$
$\mathbf{cos}\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = sin(\alpha)$
$\mathbf{sin}^2(\alpha) + \mathbf{cos}^2(\alpha) = 1$
Somformules
$\mathbf{sin}(\alpha + \beta) = \mathbf{sin}(\alpha) * \mathbf{cos}(\beta) + \mathbf{cos}(\alpha) * \mathbf{sin}\ (\beta)$
$\mathbf{sin}(\alpha - \beta) = \mathbf{sin}(\alpha) * \mathbf{cos}(\beta) - \mathbf{cos}(\alpha) * \mathbf{sin}\ (\beta)$
$\mathbf{cos}(\alpha + \beta) = \mathbf{cos}(\alpha) * \mathbf{cos}(\beta) - \mathbf{sin}(\alpha) * \mathbf{sin}\ (\beta)$
$\mathbf{cos}(\alpha - \beta) = \mathbf{cos}(\alpha) * \mathbf{cos}(\beta) + \mathbf{sin}(\alpha) * \mathbf{sin}\ (\beta)$
Verdubbelingsformules
$\mathbf{sin}(2\alpha) = 2\mathbf{sin}\ (\alpha)\ \mathbf{cos}(\alpha)$
$\mathbf{cos}(2\alpha) = \mathbf{cos}^2(\alpha) - \mathbf{sin}^2(\alpha)$

De somformules en de verdubbelingsformules worden gegeven bij je examen. Deze hoef je dus niet uit je hoofd te kennen, de rest van de formules wel!

Met deze formules lukt het je om de rest van alle formules te herleiden! Zo krijg je bijvoorbeeld:

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

Als je de volgende twee formules combineert:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \quad en \quad \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

Want:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \rightarrow \sin^2(\alpha) = -\cos^2(\alpha) + 1$$

Je kunt natuurlijk ook meer dan 1x over een cirkel lopen. Een rondje extra is dus +2. Als je bijvoorbeeld $3\frac{1}{4}$ rondjes over de cirkel loopt, is dit hetzelfde als een kwart rondje + 3 rondjes (= $\frac{\pi}{2} + 3 * 2\pi$). Hier heb je een standaardformule voor:

$$y = A + k * 2\pi \quad of \quad y = \pi - A + k * 2\pi$$

$$x = A + k * 2\pi \quad of \quad x = -A + k * 2\pi$$

Hierin is A de draaiingshoek en k is het aantal rondjes extra is.

Met behulp van deze twee formules is het makkelijk om vergelijkingen met sinussen en cosinussen op te lossen. Zo is het mogelijk om alle oplossingen mogelijk te vinden:

$\boldsymbol{y}$	$\sin(A) = \sin(B)$	$A = B + k * 2\pi \quad of \quad A = \pi - B + k * 2\pi$
$\boldsymbol{x}$	$\cos(A) = \cos(B)$	$A = B + k * 2\pi \quad of \quad A = -B + k * 2\pi$
$\boldsymbol{y/x}$	$\tan(A) = \tan(B)$	$A = B + k * \pi$

Voorbeeldopgave 1: Goniometrische functies

Los op:

$$4 * \sin^2 \alpha = 2$$

Uitwerking

$$\boldsymbol{\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}}$$

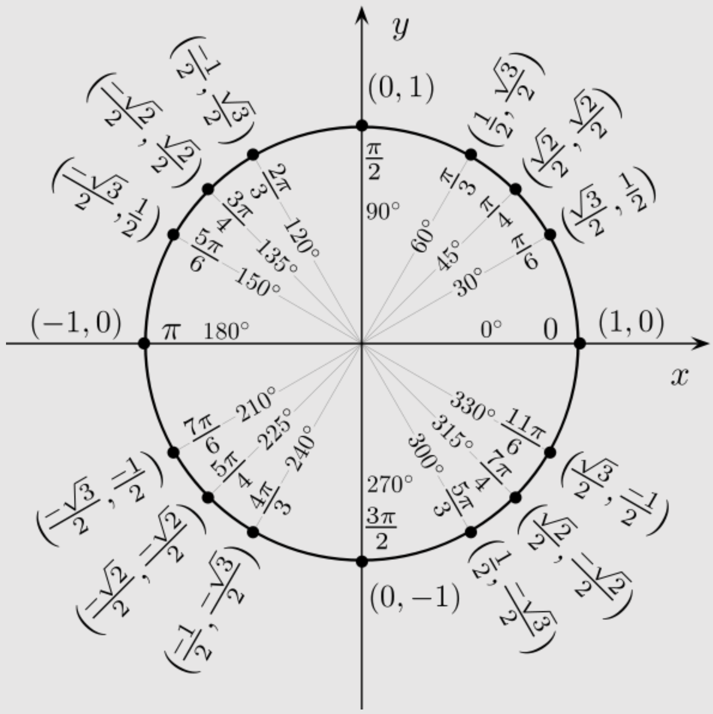
$$\sin(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad of \quad \sin(\alpha) = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Omschrijven geeft:

$$\sin(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{2}{2^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad of \quad \sin(\alpha) = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{2}{4}} = -\sqrt{\frac{2}{2^2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Dit kun je oplossen door $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ & $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ af te lezen in de grafiek.

Aflezen in grafiek:



Omdat het $\sin(\alpha)$ is, gaan we kijken naar de y-coördinaten. Lees af:

Voor $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ → $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ en $\alpha = \frac{3}{4}\pi$

Voor $y = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ → $\alpha = \frac{5}{4}\pi = -\frac{3}{4}\pi$ en $\alpha = \frac{7}{4}\pi = -\frac{1}{4}\pi$

De oplossing voor meerdere rondjes is dus:

$$\alpha = \frac{1}{4}\pi + k * 2\pi \quad of \quad \alpha = \frac{3}{4}\pi + k * 2\pi \quad of \quad \alpha = -\frac{3}{4}\pi + k * 2\pi \quad of \quad \alpha = -\frac{1}{4}\pi + k * 2\pi$$

Deze vier antwoorden kun je in één keer noteren als:

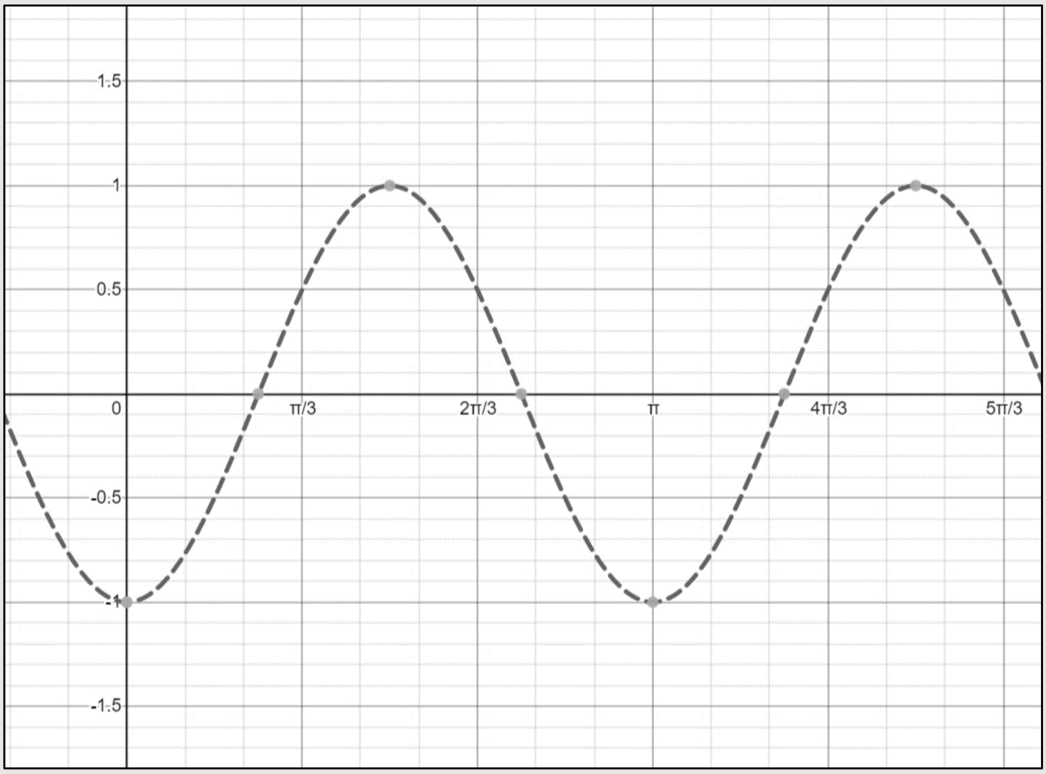
$$\alpha = \frac{1}{4}\pi + k * \frac{1}{2}\pi$$

Voorbeeldopgave 2: Goniometrische functies

Los op:

$$(\cos(\alpha) + \sin(\alpha)) * (\sin(\alpha) - \cos(\alpha)) = \frac{1}{2}$$

In het domein $[0,\pi]$.



Uitwerking
Eerst gaan we de haakjes wegwerken:

$$(\cos(\alpha) + \sin(\alpha)) * (\sin(\alpha) - \cos(\alpha)) =$$

$$\cos(\alpha) * \sin(\alpha) - \cos^2(\alpha) + \sin^2 - \cos(\alpha) * \sin(\alpha) =$$

$$-\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)$$

De complete formule wordt dan:

$$-\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}$$

Pas de volgende regel toe:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \rightarrow$$

$$\sin^2(\alpha) = -\cos^2(\alpha) + 1$$

Invullen in de formule geeft:

$$-\cos^2(\alpha) - \cos^2(\alpha) + 1 = \frac{1}{2}$$

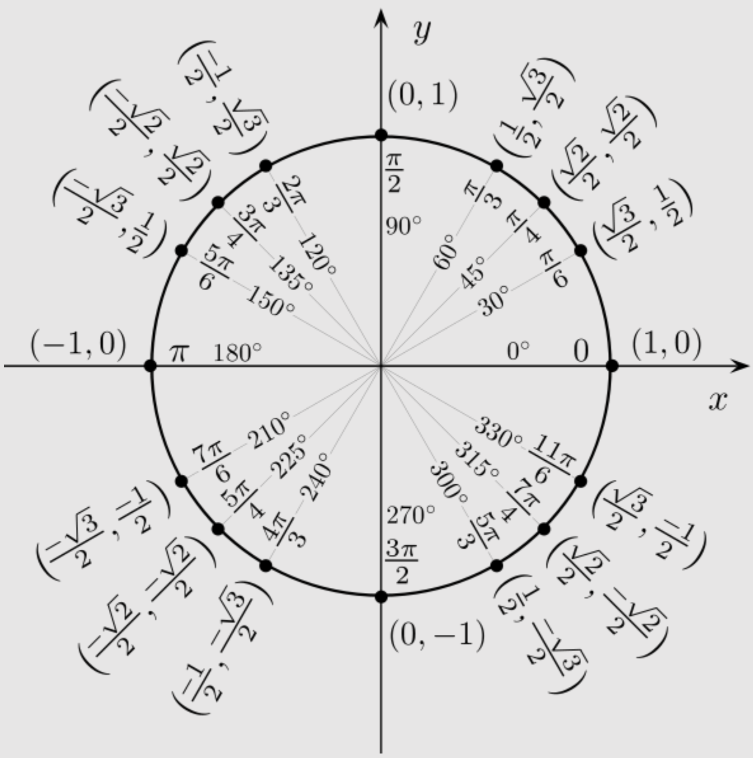
$$-2\cos^2(\alpha) + 1 = \frac{1}{2}$$

$$-2\cos^2(\alpha) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{4}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \quad of \;\; \cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$$

Aflezen uit grafiek geeft:



Omdat het $\cos(\alpha)$ is, gaan we kijken naar de x-coördinaten. Lees af:

Voor $x = \frac{1}{2} \rightarrow$ $\quad \alpha = \frac{1}{3}\pi \quad$ en $\quad \alpha = \frac{5}{3}\pi = -\frac{1}{3}\pi$

Voor $x = -\frac{1}{2} \rightarrow$ $\quad \alpha = \frac{2}{3}\pi \quad$ en $\quad \alpha = \frac{4}{3}\pi = -\frac{2}{3}\pi$

De oplossing voor meerdere rondjes is dus:

$$\alpha = \frac{1}{3}\pi \ + k * 2\pi \quad of \quad \alpha = -\frac{1}{3}\pi\, k * 2\pi \quad of \quad \alpha = -\frac{2}{3}\pi \ + k * 2\pi \quad of \quad \alpha = \frac{2}{3} + k * 2\pi$$

Deze vier antwoorden kun je in één keer noteren als:

$$\alpha = \frac{\pi}{3} + k * \frac{1}{3}\pi$$

In het domein $[0, \pi]$ is het antwoord dus:

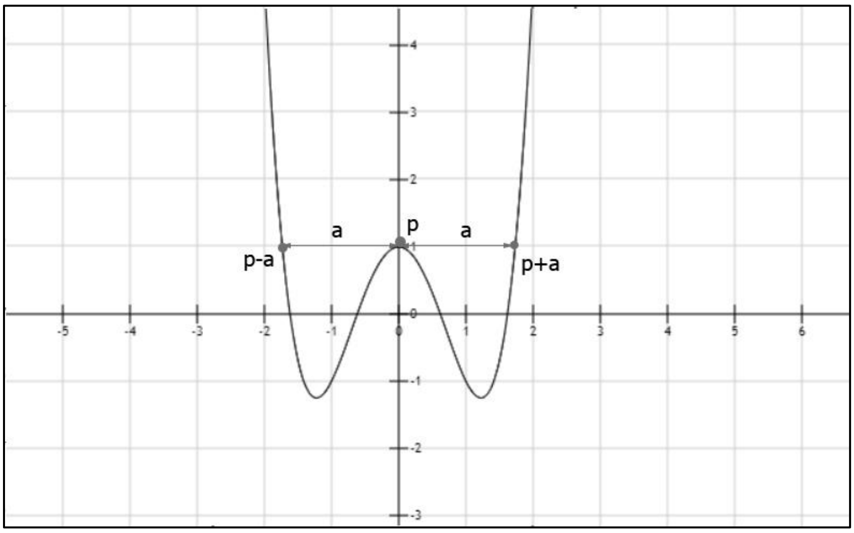
$$\alpha = \frac{\pi}{3} \quad of \quad \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

Controleer in de grafiek door te kijken op $y = 0.5$. Dit toont aan dat deze hoeken inderdaad kloppen in het domein $[0, \pi]$.

Lijnsymmetrisch

Een functie is lijnsymmetrisch als er in een verticale lijn $(x = p)$ gespiegeld kan worden voor iedere a. In dit geval is de verticale lijn de y-as:

$$Er\ geldt: \quad f(p - a) = f(p + a)$$



Puntsymmetrisch

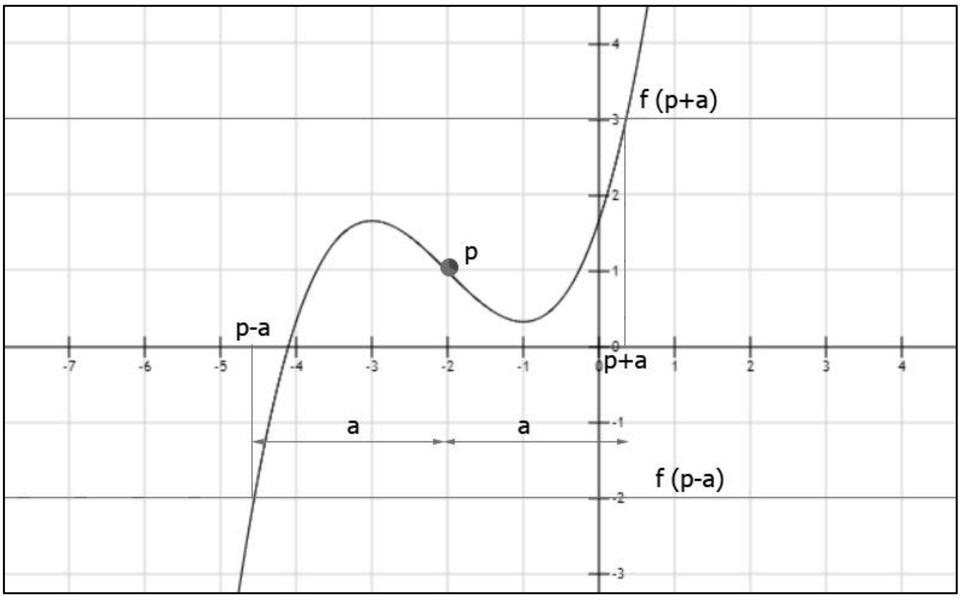
Een functie is puntsymmetrisch als deze symmetrisch is ten opzichte van een bepaald punt $p(p, b)$

$$Er\ geldt: \quad f(p - a) + f(p + a) = 2b$$

Dit betekent dus dat als je vanaf punt p een stapje a naar rechts gaat dit evenveel y omhoog gaat als een stapje a naar links omlaag gaat in y.

Makkelijker gezegd: het gemiddelde van de y-waardes is dus gewoonweg gelijk aan b (de y-waarde van punt p):

$$\frac{f(p - a) + f(p + a)}{2} = b$$

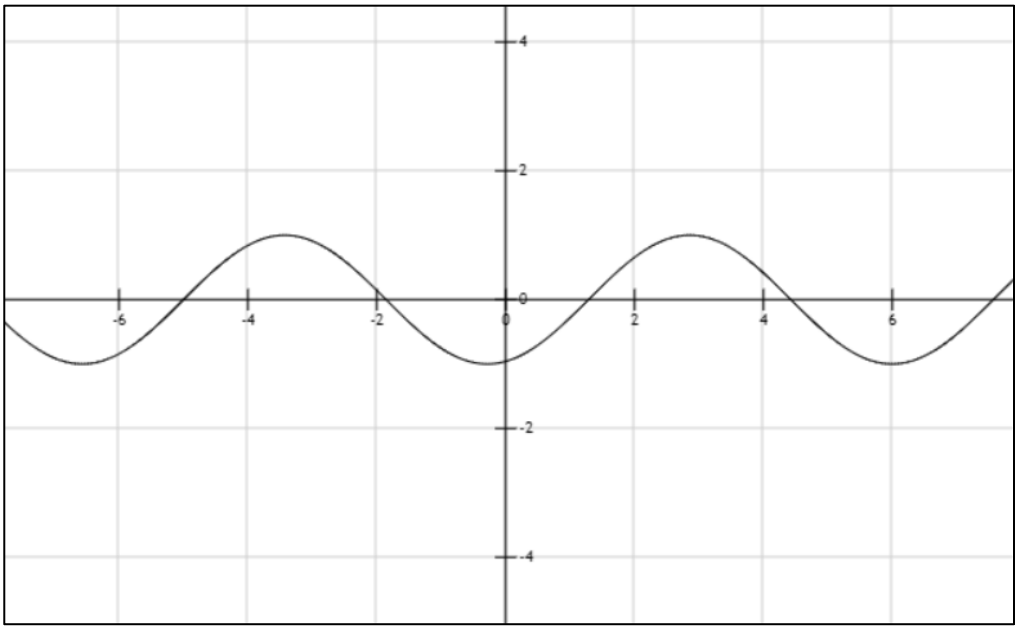


Video WisBV-D1-2

Punt én lijnsymmetrie wordt in deze video nogmaals voor je uitgelegd!

Harmonische trilling

Wanneer een punt zich herhalend langs een rechte lijn rondom een evenwichtstand beweegt, wordt dit ook wel een **harmonische trilling** genoemd:



De formule voor een harmonische trilling is als volgt:

$$h(t) = a + b * \sin\left(c(t - t_0)\right)$$

Waar:

$h(t) = hoogte\ op\ een\ bepaald\ tijdstip$

$a = evenwichtsstand$

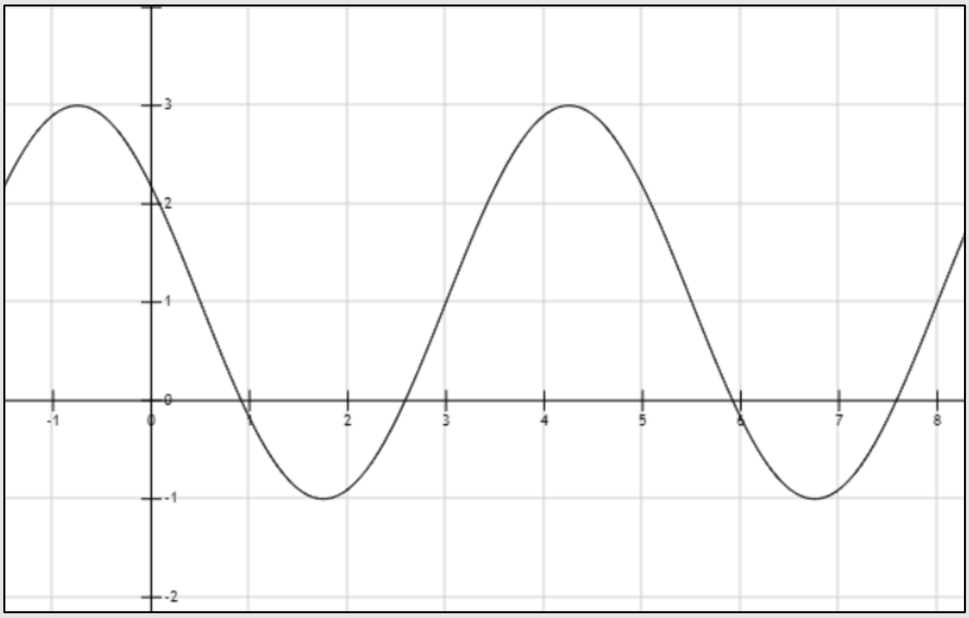
$b = amplitude$

$c = \frac{2\pi}{T},\quad waar\ T = trillingstijd = \frac{1}{f}$

$t_0 = horizontale\ verplaatsing\ t.o.v.\ de\ oorsprong$

Voorbeeldopgave 3: Harmonische trilling

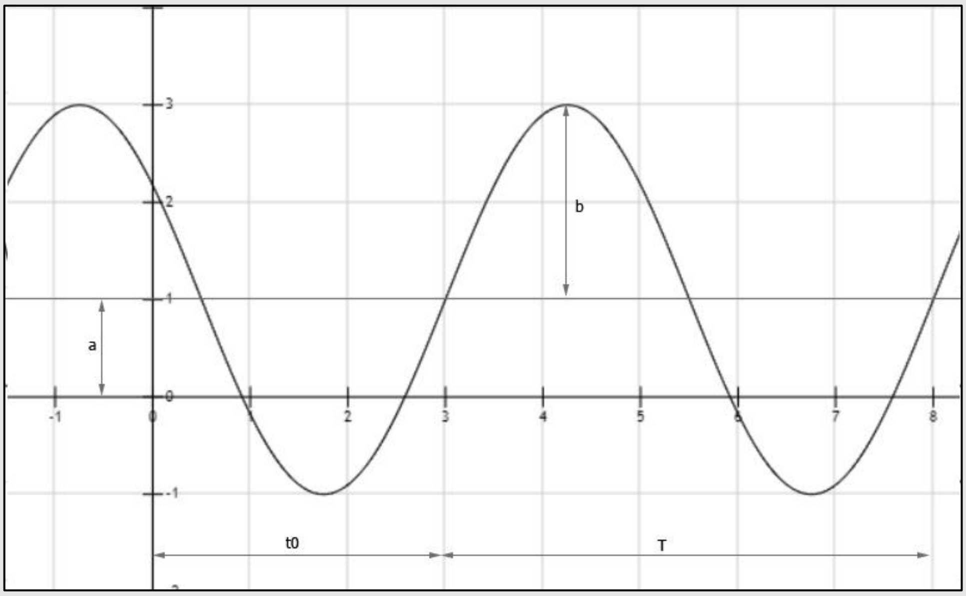
c. Bepaal de functie van de volgende harmonische trilling:



d. Bepaal hoe hoog de trilling is bij $t = 5{,}5$.

Uitwerking

a.



Zoals je kunt aflezen uit de grafiek is de evenwichtsstand rond het punt $a = 1$. De amplitude, $b = 2$. De tijd voor één golf, oftewel de trillingstijd, is $T = 5$. Dit betekent dus dat $c = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{5}$. Verder is de horizontale verplaatsing t.o.v de horizon $t_0 = 3$. Dit invullen in de formule:

$$h(t) = a + b * \sin\left(c(t - t_0)\right)$$

Geeft:

$$h(t) = 1 + 2 * \sin\left(\frac{2\pi}{5}(t-3)\right)$$

a. De hoogte van de trilling bij $t = 5{,}5$ kun je bepalen door $t = 5{,}5$ in de formule in te vullen:

$$h(t) = 1 + 2 * \sin\left(\frac{2\pi}{5}(5{,}5-3)\right)$$

$$h(t) = 1 + 2 * \sin\left(\frac{2\pi}{5} * 2{,}5\right)$$

$$h(t) = 1 + 2 * \sin(\pi) = 1 + 2 * 0 = 1$$

Als je dit controleert in de grafiek zie je dat het klopt!

Afsluiting Domein D

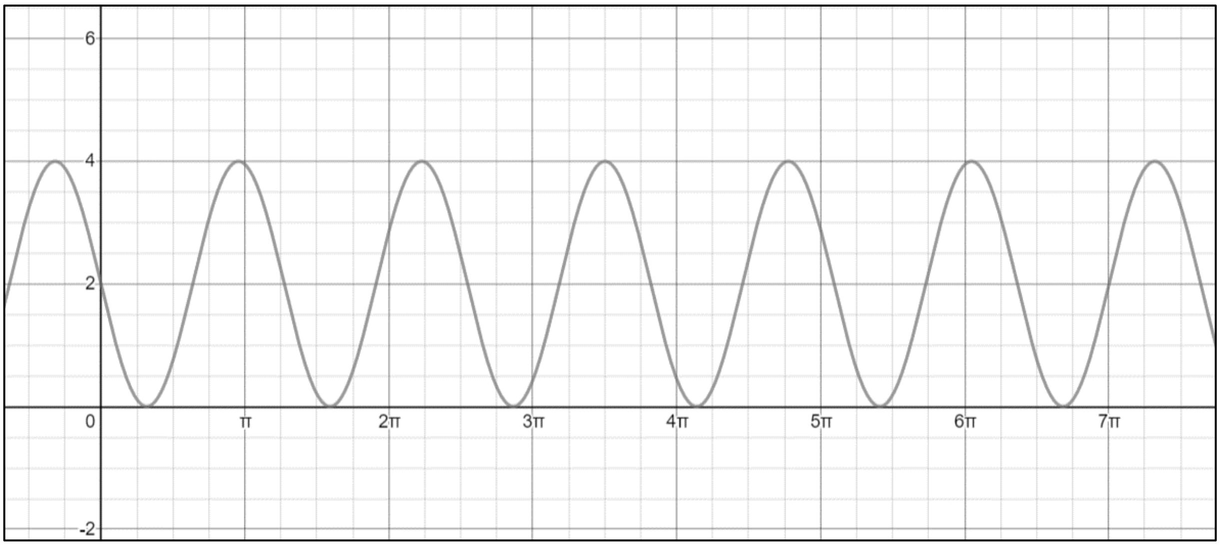
Log in op onze website www.examengevat.nl, ga naar Mijn Account > Mijn leeromgeving > het desbetreffende vak en domein. Of… **scan onderstaande QR-code, dan kom je meteen bij de oefenvragen van Domein D van Wiskunde B – VWO (vergeet niet eerst in te loggen!):**

OEFENVRAGEN WB -V

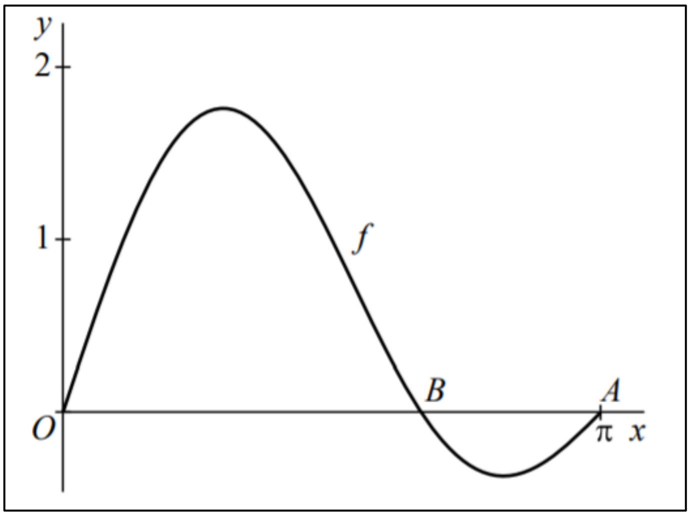
Oefenopgaven Domein D

Vraag 1
Herleid $-sin(x - 2\,\pi)$ tot een functie in de vorm $\cos\,(ax + b)$.

Vraag 2
Bepaal de functie van de volgende harmonische trilling, met: $h(t) = a + b\,sin(c(t - d))$ met waarin b is positief.



Vraag 3 (examenopgave 2011 I – vraag 13)
De functie f is gegeven door $f(x) = sin + sin(2x)$ op het domein $[0, \pi\,]$. In het volgende figuur is de grafiek van f getekend. Deze grafiek snijdt de $x - as$ tussen $O(0{,}0)$ en $A(\pi, 0)$ in het punt B.



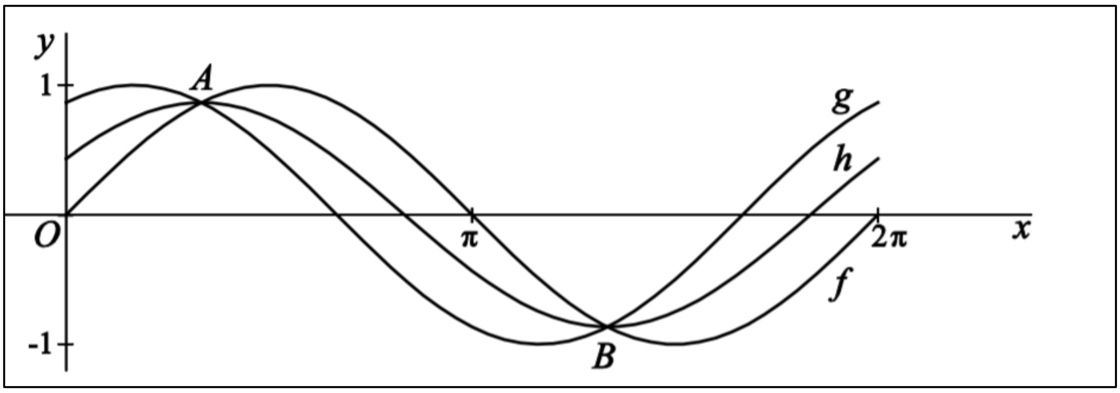
Bereken exact de x-coördinaat van punt B.

Vraag 4 (examenopgave 2012 I – vraag 9)
Gegeven:

$$f(x) \;= sin(x)$$

$$g(x) \;=\; sin(x \;+\; 1/3\pi)$$

De functie h is gegeven door $h(x) = \frac{1}{2} * (f(x) + g(x))$. In figuur 2 zijn de grafieken van f, g en h getekend op het domein $[0, 2\pi]$.



Bereken exacte waarden van a en b zo dat $h(x) = \frac{1}{2} * (f(x) + g(x))$ te herleiden is tot:

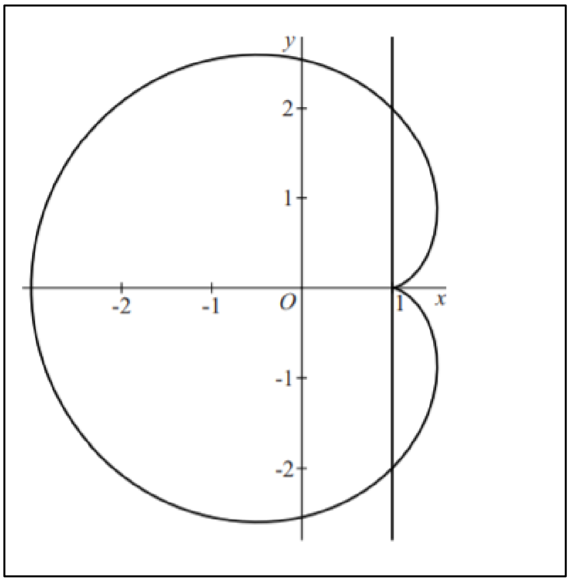
$$a * \sin(x + b)$$

Vraag 5 (examenopgave 2013 II – vraag 11)
Voor $0 \leq t \leq 2\pi$ wordt de beweging van een punt P beschreven door de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}$$

In het figuur is de baan van P getekend. Voor $t = 0$ en $t = 2\pi$ bevindt P zich in $(1, 0)$.

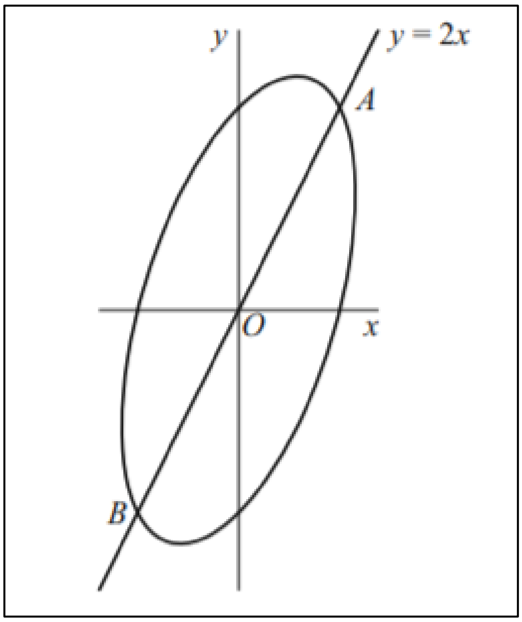
De lijn met vergelijking $x = 1$ snijdt de baan van P behalve in het punt (1, 0) ook in de $punten$ $(1, a)$ en $(1, -a)$, met $a > 0$. Zie figuur. Bereken exact de waarde van a.



Vraag 6 (examenopgave 2012 II – vraag 5)
Punt P doorloopt in het Oxy-vlak een ellipsvormige baan volgens de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\sin(t) \\ y(t) = \sin(t + \frac{1}{3}\pi) \end{cases}$$

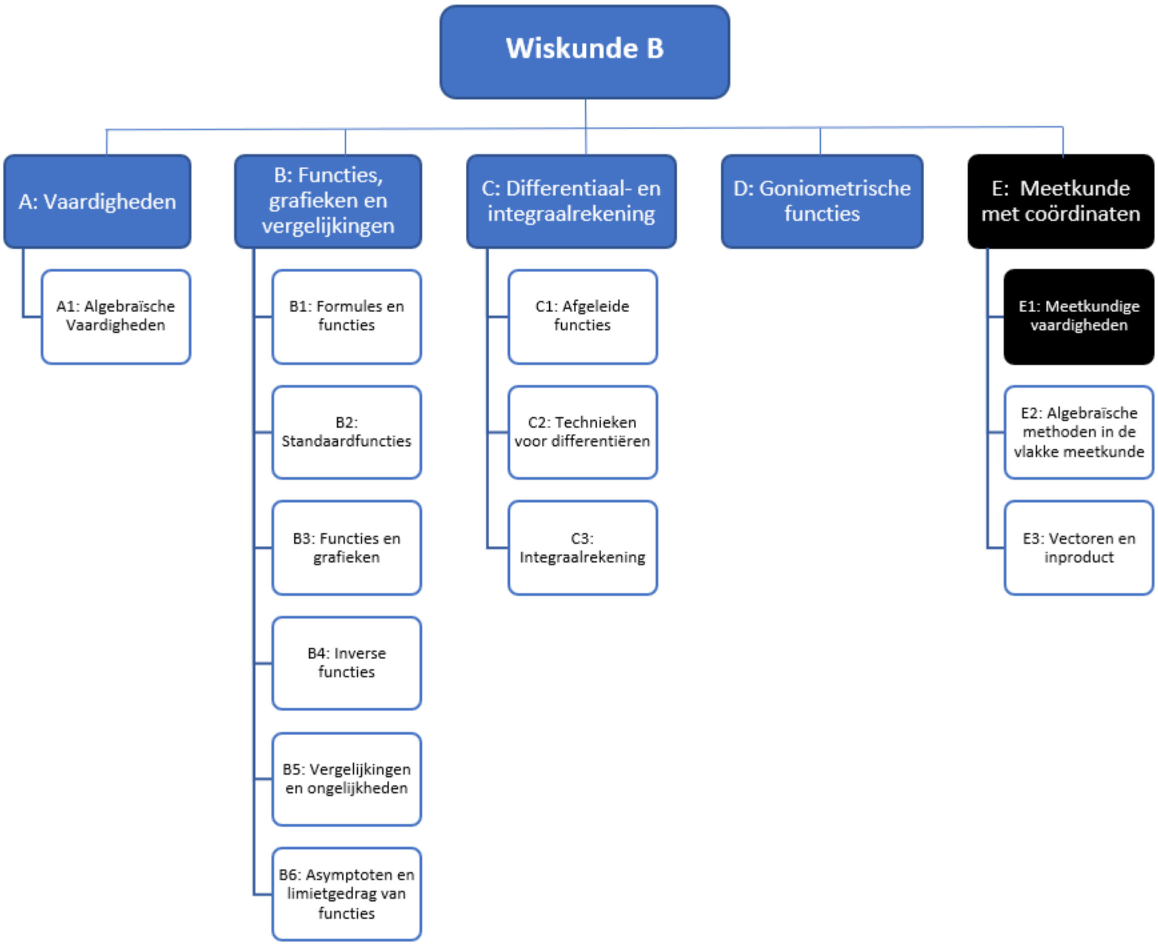
Hierin is t de tijd.
De baan van P is weergegeven in het volgende figuur.



De baan van P snijdt de lijn met vergelijking $y = 2x$ in de punten A en B. Zie figuur.
Bereken exact de coördinaten van A en B.

Domein E1: Meetkundige vaardigheden

Vakoverzicht



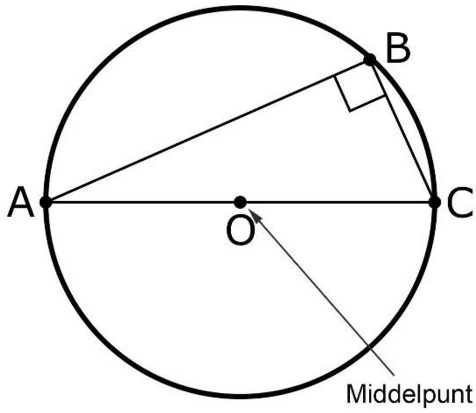
Zo, we zijn nu toch echt aangekomen bij het laatste domein! Nog even doorzetten en je hebt alle stof voor wiskunde B gehad! In dit domein gaan we driehoeken nader bekijken door middel van meetkundige en algebraïsche technieken.

Meetkundige stellingen

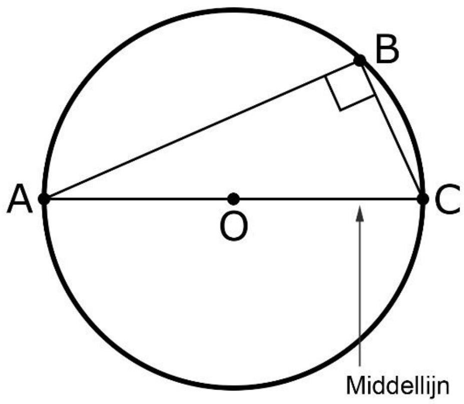
Een van de oudste en simpelste gedeeltes van wiskunde is meetkunde. Door meetkunde kom je erachter dat wiskunde vaste stellingen en regels heeft, die je overal op kunt toepassen mits het object aan de eisen voldoet. Meetkundige stellingen zijn belangrijk om te weten, want hierdoor kun je uiteindelijk bewijzen waarom iets is zoals het is. In de wiskunde is het bewijs dat bijvoorbeeld twee hoeken dezelfde grootte hebben of het bewijs waarom een afstand een bepaalde lengte is erg belangrijk. In het volgende overzicht zijn de belangrijkste stellingen en definities opgenomen waar je uiteindelijk allerlei andere stellingen mee kan bewijzen!

Voor extra uitleg kan je de video's aan de rechterzijde kijken.

Van een rechthoekige driehoek is het midden van de schuine zijde het middelpunt van de **omgeschreven cirkel** (= de cirkel die door drie hoekpunten van een driehoek gaat).

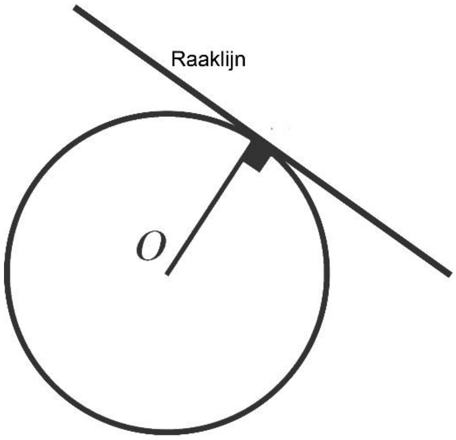


1. Een driehoek waarvan een zijde de middellijn van de omgeschreven cirkel is, is rechthoekig. Een **rechthoekige driehoek** heeft altijd een hoek van 90 graden (zie hoek B).



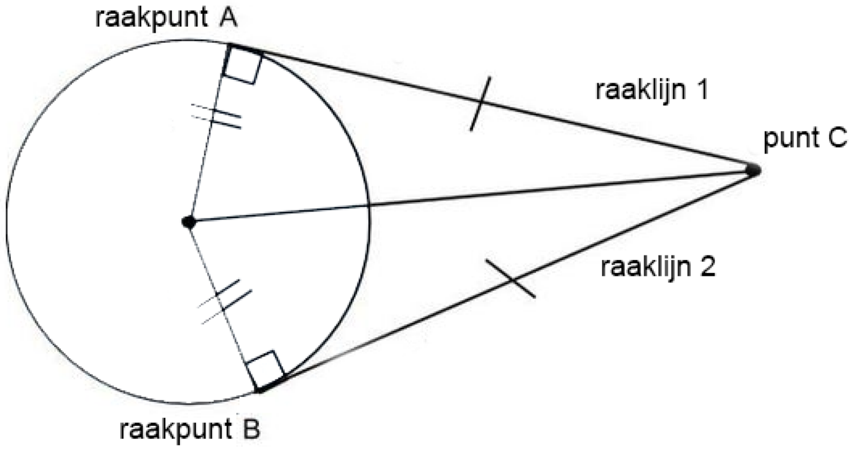
Video WisBV-E1-1

2. Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.

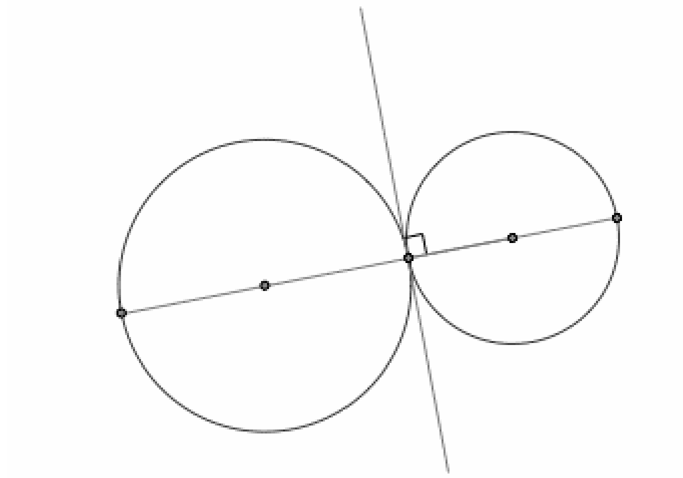


Video WisBV-E1-2

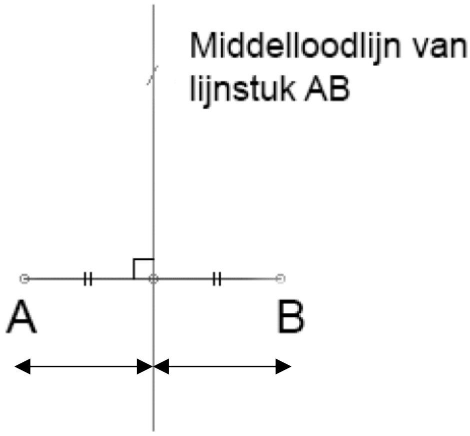
3. Als vanuit een punt twee raaklijnen aan een cirkel getrokken worden, dan zijn de afstanden van dat punt tot de twee raakpunten gelijk. Hieronder zie je dus dat de afstand van punt C naar raakpunt A gelijk is aan de afstand van punt C naar raakpunt B.



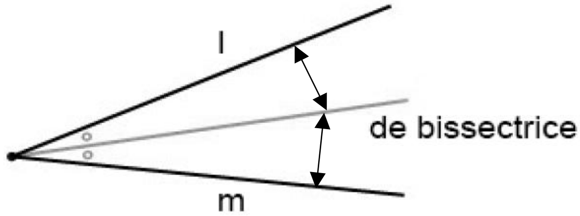
4. De raaklijn in het gemeenschappelijke raakpunt van twee elkaar rakende cirkels staat loodrecht op de verbindingslijn van de middelpunten.



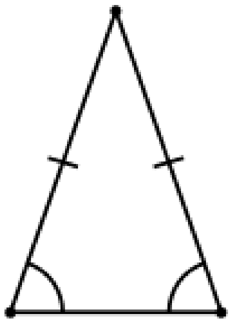
5. Voor elk punt op de **middelloodlijn** (= een lijn die een lijnstuk loodrecht doormidden snijdt) van een lijnstuk AB geldt: de afstand van dat punt tot A is gelijk aan de afstand van dat punt tot B.



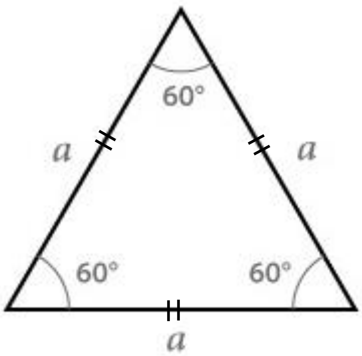
6. Voor elk punt op de **bissectrice** (= deellijn) van twee lijnen l en m geldt: de afstand van dat punt tot lijn l is gelijk aan de afstand van dat punt tot lijn m. De bissectrice is dus de lijn die de hoek tussen l en m doormidden deel



7. Bij een **gelijk<u>benige</u> driehoek** hebben twee zijdes dezelfde lengte. De hoeken tegenover de lange zijde zijn dan hetzelfde.

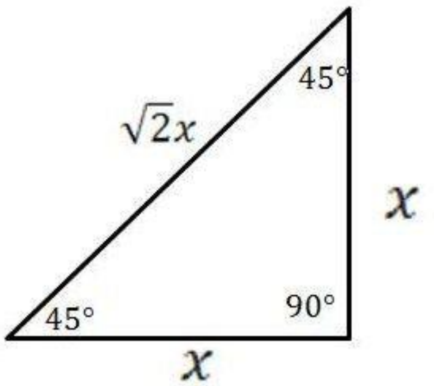


8. Bij een **gelijk<u>zijdige</u> driehoek** hebben drie zijdes dezelfde lengte. Alle hoeken zijn dan dus 60°.

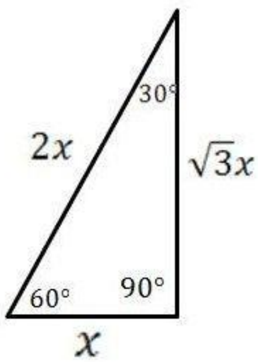


9. Er zijn drie **bijzondere rechthoekige driehoeken.** Dit domein heb je al veel geleerd over het berekenen van lengtes en hoeken in driehoeken. Helaas kreeg je hierbij vaak een afgerond getal. Gelukkig is het bij een aantal driehoeken ook mogelijk om lengten van zijden en hoogten exact te berekenen. In dit geval heb je te maken met **bijzondere driehoeken**. Er zijn drie bijzondere driehoeken:

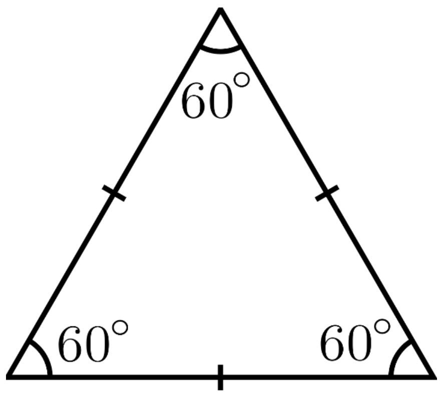
$45° - 45° - 90°$ driehoek
Dit wordt ook wel een gelijkbenige rechthoek genoemd. Twee zijdes zijn altijd even lang.



$30° - 60° - 90°$ driehoek
De schuine zijde is twee keer zo groot als een van de twee rechthoekszijdes.

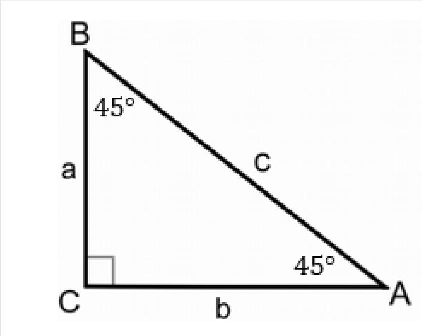


$60° - 60° - 60°$ driehoek
Een driehoek waarvan alle hoeken $60°$ zijn heet een **gelijkzijdige driehoek.** Alle zijdes zijn dus altijd even lang.



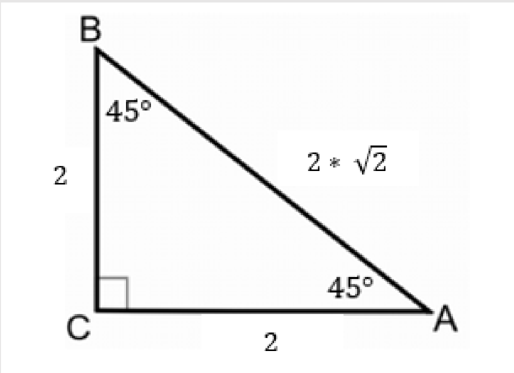
Voorbeeldopgave 1: Bijzondere rechthoekige driehoek

Van de volgende driehoek is gegeven dat $a = 2$. Bepaal b en c.



Uitwerking

Bovenstaande driehoek is een bijzondere rechthoekige driehoek met zijdes in de verhouding $1, 1, \sqrt{2}$. Zijde a is gegeven. Zijde b is altijd dezelfde lengte als zijde $a = 2$. Zijde c is altijd in de verhouding $zijde\ a * \sqrt{2}$. Dus, $c = 2 * \sqrt{2}$:



De stelling van Pythagoras

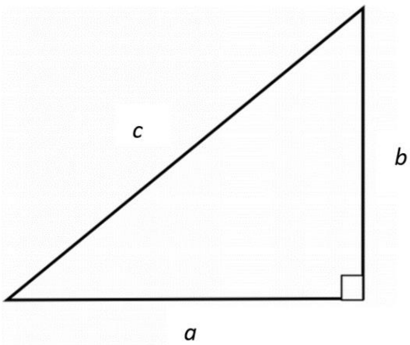
In **rechthoekige driehoeken**, oftewel een driehoek met een hoek van 90°, kun je de stelling van Pythagoras toepassen:

$$ene\ rechthoekszijde^2 + andere\ rechthoekszijde^2 = (schuine\ zijde)^2$$

Ook wel bekend als:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Hierin zijn a en b de rechthoekszijden en is c de schuine zijde:



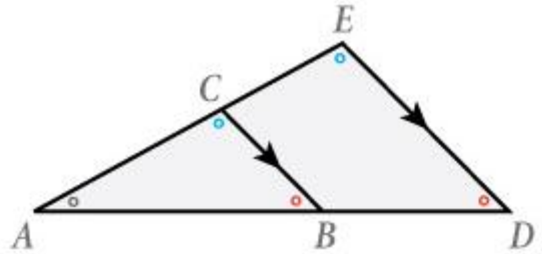
Video WisBV-E1-3

In deze video zie je hoe Pythagoras ook van pas komt bij omgeschreven cirkels!

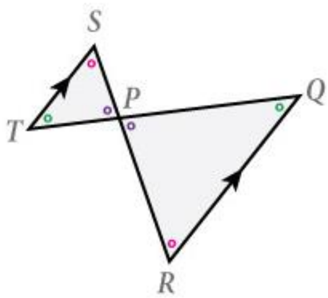
Gelijkvormigheid

Twee driehoeken zijn gelijkvormig met elkaar als deze dezelfde hoeken hebben en de zijdes dezelfde verhouding hebben. Aangezien de verhoudingen hetzelfde zijn is de ene driehoek eigenlijk gewoonweg een vergroting van de andere driehoek. Je kunt de lengtes van de zijdes dus gewoon berekenen door de driehoek te vermenigvuldigen met een factor. Om gelijkvormigheid aan te tonen kun je gebruik maken van een snavelfiguur en van een zandloperfiguur:

Snavelfiguur



Zandloperfiguur



Sinus, cosinus en tangens

Je kunt rechthoekige driehoeken berekenen als je al twee van de drie zijdes weet, met behulp van het volgende ezelsbruggetje: **SOS CAS TOA**

SOS:

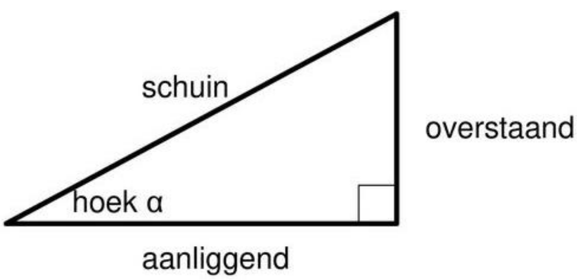
$$sin(\alpha) = \frac{Overstaande\ zijde}{Schuine\ zijde}$$

CAS:

$$cos(\alpha) = \frac{Aanliggende\ zijde}{Schuine\ zijde}$$

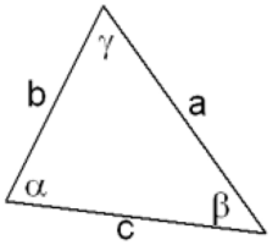
TOA:

$$tan(\alpha) = \frac{Overstaande\ zijde}{Aanliggende\ zijde}$$



Sinus- en cosinusregel

Als je de zijdes en hoeken wilt berekenen van driehoeken die niet rechthoekig zijn dan kun je de sinus- en cosinusregel toepassen. Je kunt de sinusregel gebruiken als je lengte van een zijde + de overstaande hoek weet. Als je dit niet weet, moet je de cosinusregel toepassen:



sinusregel:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

cosinusregel:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

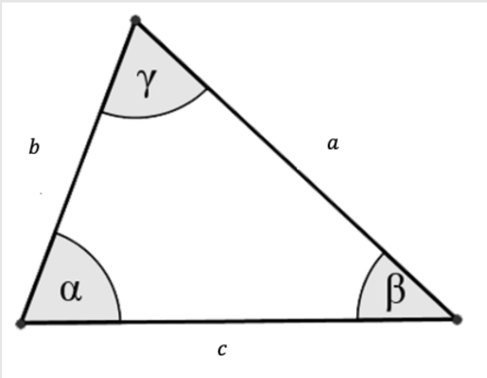
Wil je zien hoe deze regels worden bewezen én toegepast? Kijk dan de video links voor de sinusregel. En rechts voor de cosinusregel.

Video WisBV-E1-4

Video WisBV-E1-5

Voorbeeldopgave 2: Sinus- en cosinusregel

Van een bepaalde driehoek weet je dat zijde $a = 5$, hoek $\gamma = 60°$ en hoek $\beta = 45°$.
Bereken hoek α, zijde b en zijde c.



Uitwerking

Gebruik de sinusregel om zo alle zijdes en hoeken te bereken:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Vul eerst in wat je al weet:

$$\frac{5}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(45)} = \frac{c}{\sin(60)}$$

Het totaal van alle hoeken is 180°, dus $\alpha = 180 - 45 - 60 = 75°$:

$$\frac{5}{\sin(75)} = \frac{b}{\sin(45)} = \frac{c}{\sin(60)}$$

Nu kun je dus zijde b en c berekenen door kruislings te vermenigvuldigen:

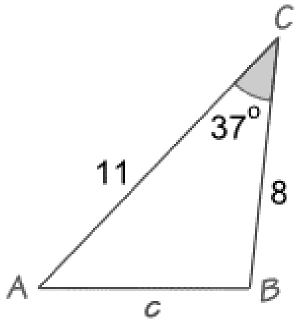
$$b = \frac{5}{\sin(75)} * \sin(45) \approx 3{,}66$$

$$c = \frac{5}{\sin(75)} * \sin(60) \approx 4{,}48$$

Oefenopgaven Domein E1

Vraag 1

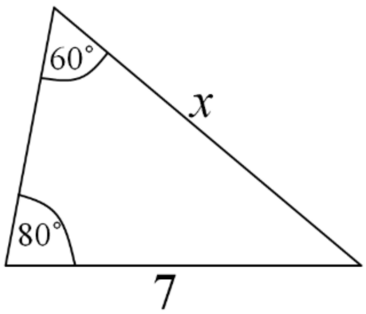
We weten dat $C = 37°$ en de zijdes $a = 8$ en $b = 8$. Bereken zijde c.



Vraag 2

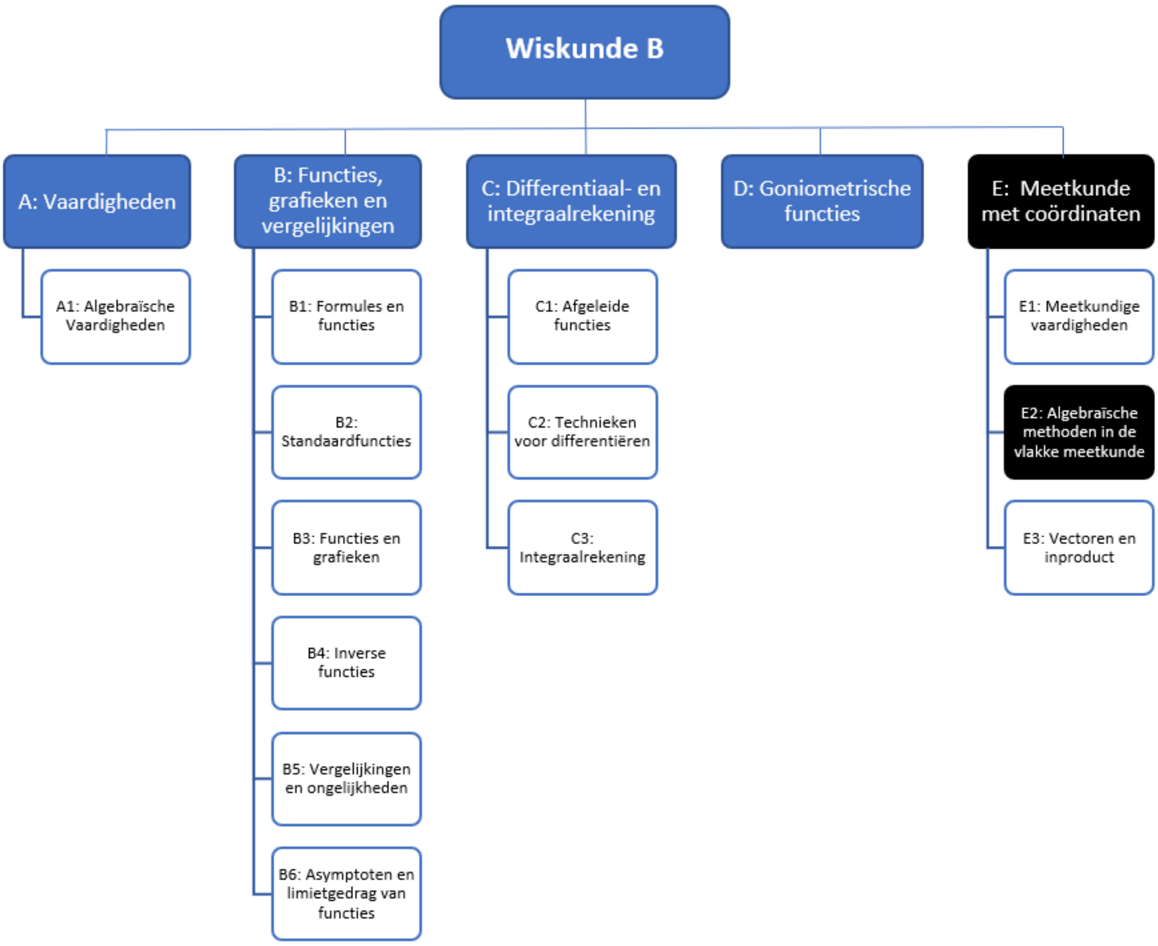
Van een bepaalde driehoek weet je dat een zijde 7 is, de tegenoverstaande hoek $= 60°$ en de aanliggende hoek $= 80°$.

Bereken x.



Domein E2: Algebraïsche methoden in de vlakke meetkunde

Vakoverzicht



In dit domein gaan we eigenschappen en onderlinge ligging van punten, lijnen, cirkels en andere geschikte figuren onderzoeken met behulp van algebraïsche voorstellingen. Aan het einde kun je in een gegeven of zelfgekozen coördinatenstelsel algebraïsche voorstellingen van figuren opstellen en algebraïsche voorstellingen gebruiken om meetkundige problemen op te lossen. Succes!

Lijnen

Meestal wordt een lijn geschreven als:

$$y = ax + b$$

Met:

$$a = r_c = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$b = beginwaarde$$

De richtingscoëfficiënt, a, laat zien hoe steil de vergelijking is. Als a heel groot is dan is de helling van de grafiek dus erg steil. Als a bijvoorbeeld $\frac{1}{5}$ is, betekent het dus dat als de grafiek 1 naar rechts gaat, de grafiek ook $\frac{1}{5}$ omhoog gaat.

De beginwaarde, b, laat zien waar de grafiek de y-as snijdt. Hier is $x = 0$.

Je kunt een lijn ook schrijven in de vorm:

$$ax + by = c$$

Dit kun je makkelijk omschrijven naar de standaardvergelijking:

$$by = c - ax$$

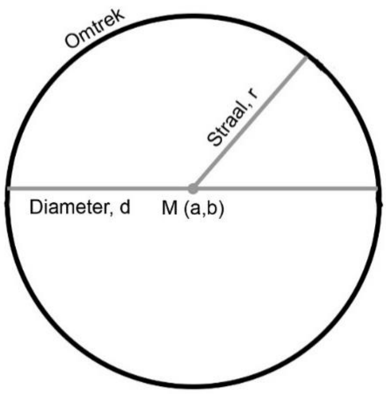
$$y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$$

Let op! Hier is de a niet de richtingscoëfficiënt.

Cirkels

Een cirkel met middelpunt $M(a, b)$ en straal r heeft als vergelijking:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$



$$omtrek = 2\pi r$$
$$diameter = 2r$$

Deze vergelijking wordt verder toegelicht aan de hand van een voorbeeld in dit filmpje.

Video WisBV-E2-1

Soms worden cirkelvergelijkingen opgeschreven in de vorm:

$$x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0$$

Ook deze formule wordt overzichtelijk toegelicht in het filmpje hieronder:

.

Soms worden cirkelvergelijkingen opgeschreven in de vorm:

$$x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0$$

Dit kun je weer omschrijven naar een normale cirkel vergelijking door middel van **kwadraat afsplitsen**. Met behulp van kwadraat afsplitsen krijg je uiteindelijk een formule waar maar één x en één y in staat wat het makkelijker maakt om deze op te lossen.

Er is één regel belangrijk om te onthouden, daarna lukt het je om bij een hele functie het kwadraat af te splitsen:

$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Als dit nog moeilijk voor je is, moet je het tweede deel van bovenstaande regel maar eens omschrijven:

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + bx + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} = x^2 + bx$$

Je ziet dat er dan ook $x^2 + bx$ uitkomt.

In de volgende tabel leer je hoe kwadraat afsplitsen nou eigenlijk werkt als je een gehele cirkelvergelijking hebt:

1. Zet alles bij elkaar.	$\boldsymbol{x^2 + cx + y^2 + dy + e = 0}$
2. Gebruik de regel voor kwadraat afsplitsen voor de x en voor de y.	$x^2 + cx \rightarrow \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2$ $y^2 + dy \rightarrow \left(y + \frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$
3. Zet alles terug in de formule.	$\left(x + \frac{1}{2}c\right)^2 - \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}d\right)^2 - \left(\frac{1}{2}d\right)^2 + e = 0$
4. Haal alle losse getallen naar rechts.	$\left(x + \frac{1}{2}c\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}d\right)^2 = -e + \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + \left(\frac{1}{2}d\right)^2$

Zo krijg je dus uiteindelijk weer een vergelijking in de vorm:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Waar:

$$a = \frac{1}{2}c$$

$$b = \frac{1}{2}d$$

$$r^2 = -e + \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + \left(\frac{1}{2}d\right)^2$$

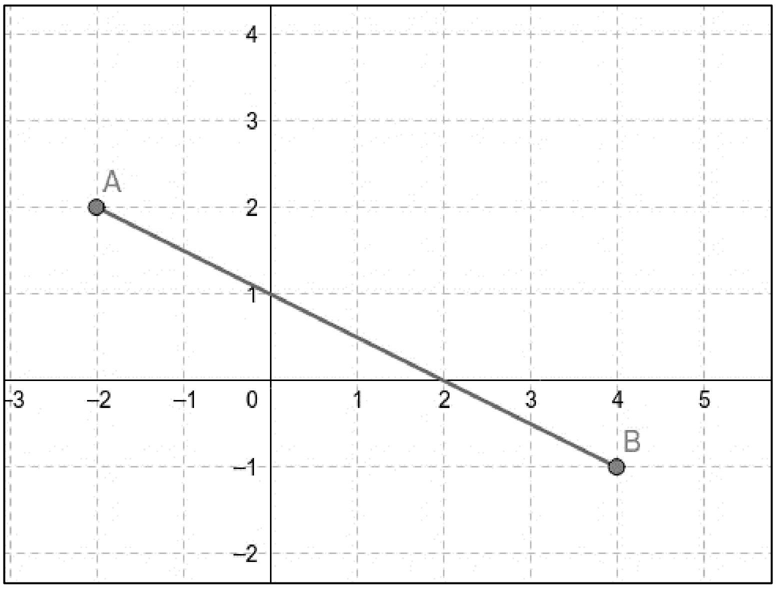
Afstanden en hoeken berekenen

Afstand tussen twee punten berekenen

Met behulp van de stelling van Pythagoras kan de afstand, d, tussen twee punten (punt $A\ (x_a, y_a)$ en $B\ (x_b, y_b)$) worden berekend:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

Bijvoorbeeld:

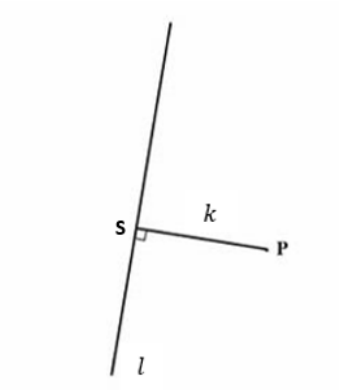


$$d(A,B) = \sqrt{(4 - -2)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{(6)^2 + (3)^2} = \sqrt{45}$$

Deze video laat het je zien aan de hand van een voorbeeld, altijd handig!

Afstand tussen een punt en een lijn berekenen

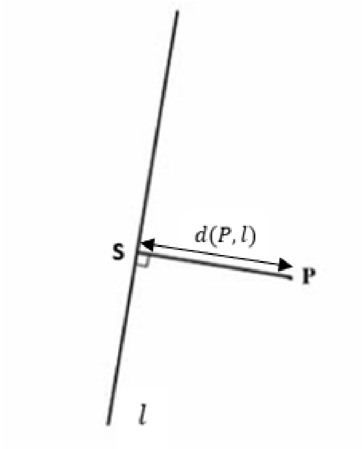
De kortste afstand van een punt tot een lijn is altijd de lijn loodrecht erop. Om de lengte van dit loodlijnstuk te berekenen moet je eerst de vergelijking opstellen van een lijn k die loodrecht op l staat, die op een gegeven moment door punt P gaat.



Voor loodrechte lijnen geldt dat als je beide richtingscoëfficiënten vermenigvuldigt:

$$r_{c,l} * r_{c,k} = -1$$

Vervolgens moet je het snijpunt van de lijnen bepalen. Je weet namelijk dat de afstand tussen P en l hetzelfde is als de afstand tussen P en het snijpunt S.



$$d(P,l) = d(P,S) = \sqrt{(x_P - x_S)^2 + (y_P - y_S)^2}$$

Nog even een voorbeeld uitgelegd krijgen? Check dan deze video!

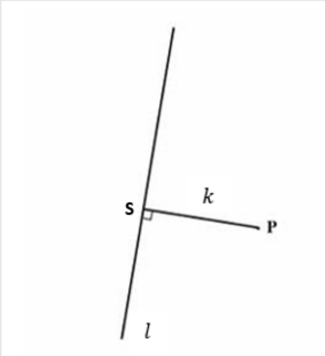
Video WisBV-E2-4

Voorbeeldopgave 1: Afstand tussen twee punten

Bereken de afstand tussen de volgende punten:

$$P = (4,3)$$

$$S = (0,4)$$



Uitwerking

$$d(P,S) = \sqrt{(x_P - x_S)^2 + (y_P - y_S)^2}$$

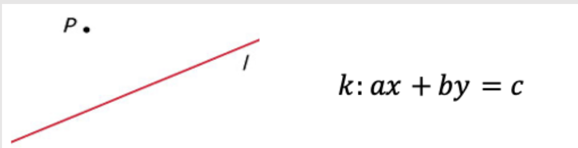
$$P = (4,3) \rightarrow \; x_P = 4, \; y_P = 3$$

$$S = (0,4) \rightarrow \; x_s = 0, \; y_s = 4$$

$$d(P,S) = \sqrt{(4-0)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{17}$$

Als punt $P(x_p, y_p)$ en de lijn $k: ax + by = c$ gegeven is, dan is de formule voor de afstand tussen punt P en de lijn k:

$$D(P,k) = \frac{|a * x_p + b * y_p - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Voorbeeldopgave 2: Afstand tussen punt en lijn

Bereken de afstand van het punt $P = (5,5)$ tot de lijn $k: 3x + 2y = 12$.

Uitwerking

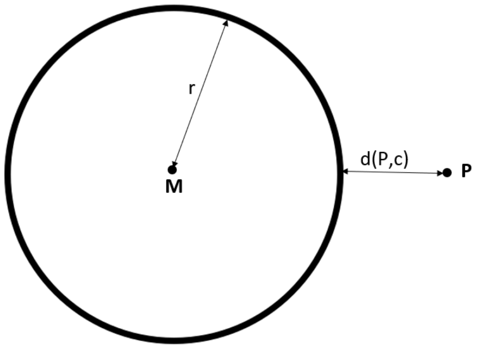
$$D(P,k) = \frac{|a * x_p + b * y_p - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

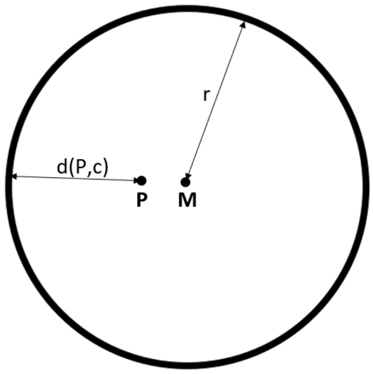
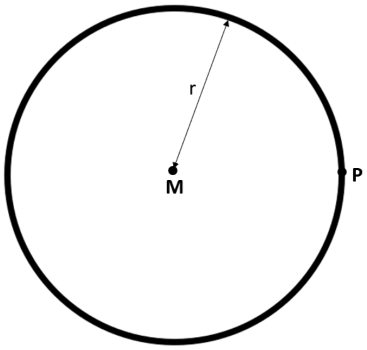
$$D(P,k) = \frac{|3 * 5 + 2 * 5 - 12|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

Afstand tussen een punt en een cirkel berekenen

De kortste afstand van een punt P tot een cirkel c is de afstand $d(P,c)$.

Punt P ligt buiten de cirkel.	$\boldsymbol{d(P,c) = d(P,M) - r}$



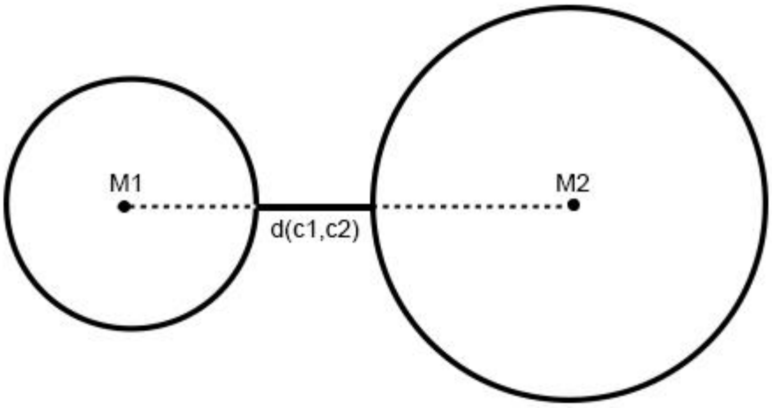
Punt P ligt in de cirkel.	$d(P,c) = r - d(P,M)$	
Punt P ligt op de cirkel.	$d(P,c) = 0$	

Wil je meer uitleg met behulp van een voorbeeld? Scan dan de QR-code!

Afstand tussen twee cirkels berekenen

Om de afstand tussen twee cirkels (cirkels c_1 en c_2) te bepalen moet je de stralen aftrekken van de afstand tussen de middelpunten van de twee cirkels (de stippellijn).

$$d(c_1, c_2) = d(M_1, M_2) - r_1 - r_2$$

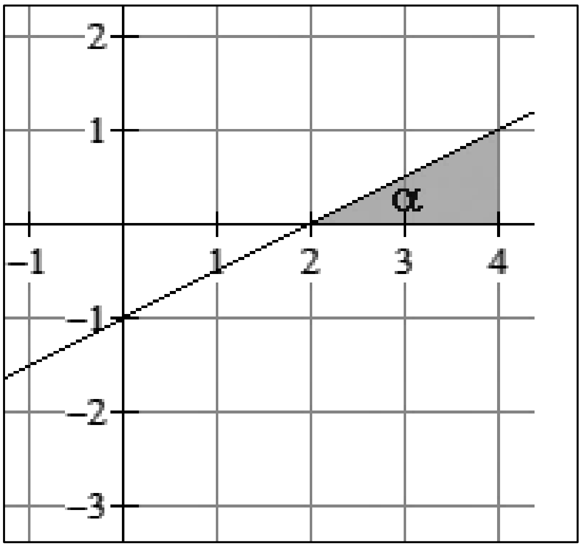


Ook deze video kan je raadplegen om het nóg beter te begrijpen!

De hoek tussen lijnen berekenen

Je kunt de hoek tussen twee lijnen berekenen door eerst de hellingshoek van de lijnen te berekenen. De **hellingshoek, $\boldsymbol{\alpha}$**, is de hoek die een lijn met de positieve x-as maakt. De afspraak is dat α altijd tussen $-90°$ en $90°$ is. Om dit te kunnen berekenen moet je dus de richtingscoëfficiënt van een lijn weten!

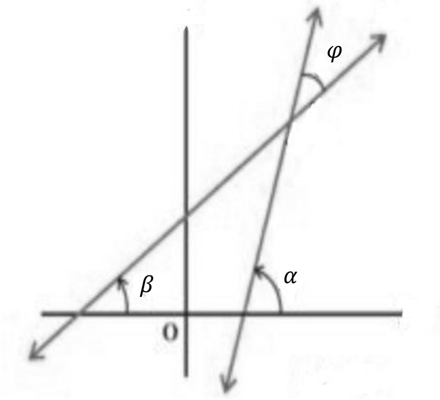
$$\tan(\alpha) = \frac{overstaande}{aanliggende} = de\ \ richtingsco\ddot{e}fficiënt$$



Om de hoek tussen twee lijnen (met hellingshoeken $\alpha\,\&\,\beta$) te berekenen moet je de hellingshoeken gewoonweg van elkaar aftrekken, met $\alpha > \beta$:

Als $\alpha - \beta \leq 90°$: $\varphi = \alpha - \beta$

Als $\alpha - \beta > 90°$ $\varphi = 180° - (\alpha - \beta)$



Zijn van de lijnen de richtingsvectoren bekend, dan gebruik je bij het berekenen van de hoek tussen de lijnen k en l de formule:

$$\cos(\varphi) = \frac{ac + bd}{\left|\binom{a}{b}\right| \cdot \left|\binom{c}{d}\right|}$$

Waar $\binom{a}{b}$ en $\binom{c}{d}$ de richtingsvectoren zijn van respectievelijk lijn k en lijn l.

Misschien helpt deze video je de voorbeeldopgave foutloos te maken!

Video WisBH-C2-6

Voorbeeldopgave 3: Hoek tussen twee lijnen

Bereken de hoek tussen de volgende lijnen:

$$3x - 2y = 5$$

$$4x - 3y = 6$$

Uitwerking

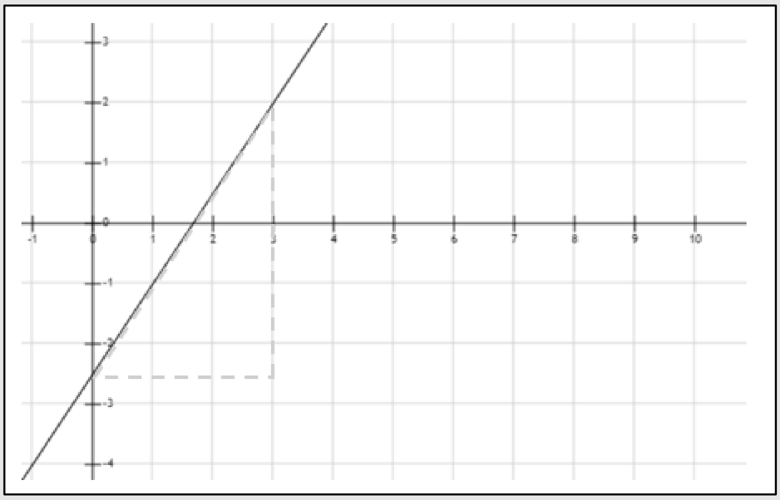
Schrijf eerst de lijnen om, zodat je de richtingscoëfficiënt kunt bepalen:

$$3x - 2y = 5 \rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \rightarrow r_c = \frac{3}{2}$$

$$4x - 3y = 6 \rightarrow y = \frac{4}{3}x - 2 \rightarrow r_c = \frac{4}{3}$$

Je had de richtingscoëfficiënt ook kunnen bepalen door de grafiek af te lezen:

$$\mathbf{3x - 2y = 5}$$

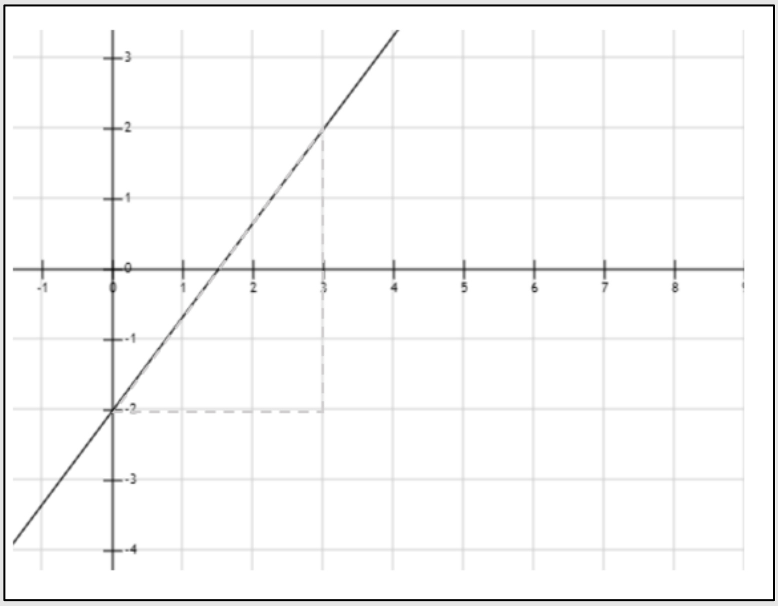


$$\tan(\alpha) = \frac{overstaande}{aanliggende} = de\ \ richtingsco\ddot{e}fficiënt$$

$$\tan(\alpha) = \frac{4{,}5}{3} = 1{,}5$$

$$\alpha = \tan^{-1} 1{,}5 = 56{,}31$$

$$\mathbf{4x - 3y = 6:}$$



$$\tan(\beta) = \frac{overstaande}{aanliggende} = de\ \ richtingsco\ddot{e}fficiënt$$

$$\tan(\beta) = \frac{4}{3}$$

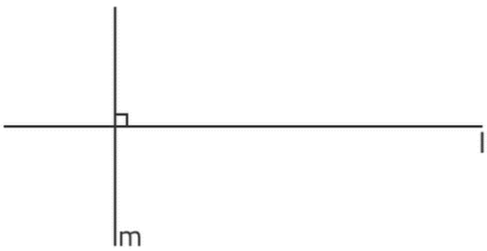
$$\beta = \tan^{-1} 4/3 = 53{,}13$$

Als $\alpha - \beta \leq 90°$:

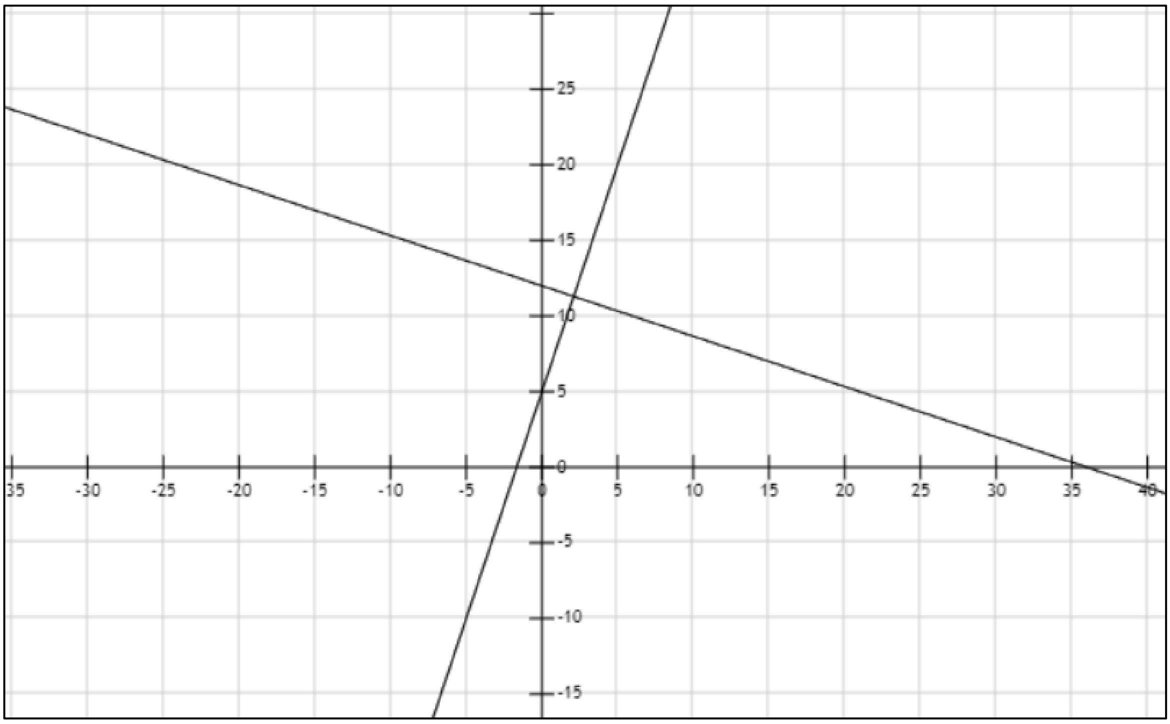
$$\varphi = \ \alpha - \beta = 56{,}31 - 53{,}13 \approx 3{,}18°$$

De loodlijn

Een loodlijn is een lijn die loodrecht op een andere lijn staat.



Je weet zeker dat je te maken hebt met een loodlijn als er bij vermenigvuldiging van de richtingscoëfficiënten van twee lijnen -1 uitkomt. Zo zie je bijvoorbeeld dat de grafieken $y = 3x + 5$ & $y = -\frac{1}{3}x + 12$ elkaar loodrecht snijden want $3 * -\frac{1}{3} = -1$. Zie de figuur hieronder:



Stelsel van vergelijkingen

Er is sprake van een stelsel van vergelijkingen als er meerdere vergelijkingen zijn in de vorm van:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = r \end{cases}$$

Bijvoorbeeld:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 5x + 3y = 9 \end{cases}$$

Er is een aantal regels verbonden aan een stelsel van vergelijkingen:

Een snijpunt	1 oplossing	De lijnen hebben 1 snijpunt.	$\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$
Strijdig stelsel	Nul oplossingen	De lijnen lopen evenwijdig.	$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$
Afhankelijk stelsel	Oneindig veel oplossingen	De lijnen zijn gelijk.	$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$
Loodrecht	1 oplossing	De lijnen staan loodrecht.	$\frac{a}{b} * \frac{p}{q} = -1$

Voorbeeldopgave 4: Stelsel van vergelijkingen

Gegeven is het volgende stelsel:

$$\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 4x + qy = 5 \end{cases}$$

De lijnen staan loodrecht op elkaar. Bereken q.

Uitwerking
Als de lijnen loodrecht op elkaar staan, dan geldt:

$$\frac{a}{b} * \frac{p}{q} = -1$$

Oftewel:

$$\frac{1}{3} * \frac{4}{q} = -1$$

Omschrijven geeft:

$$\frac{1}{3} * 4 = -q$$

Oftewel:

$$q = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$$

Parametervoorstellingen

Een lijn in een vlak kan beschreven worden met een parametervoorstelling:

$$k: \begin{cases} x(t) = at + b \\ y(t) = ct + d \end{cases}$$

De parametervoorstelling van een cirkel is:

$$c: \begin{cases} x(t) = p + r * \cos(t) \\ y(t) = q + r * \sin(t) \end{cases}$$

Met als middelpunt (p, q) en straal r.

Wil je zien hoe dit werkt? Kijk dan naar de video rechts!

Video WisBV-E2-6

Snijpunten

Snijpunten van een cirkel en een lijn

Door de lijn $y = px + q$ te substitueren in de vergelijking voor een cirkel: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ kun je het snijpunt berekenen:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Substitueren geeft:

$$(x-a)^2 + (px + q - b)^2 = r^2$$

Als je dit uitwerkt, kun je x oplossen. Deze x kun je vervolgens invullen in één van de formules om y te berekenen. Misschien helpt deze video je wel om de voorbeeldopgave foutloos te maken!

Video WisBV-E2-7

Voorbeeldopgave 5: Snijpunt van een cirkel en een lijn

Vind het snijpunt van de lijn en de cirkel:

Lijn: $y = -x + 1$

Cirkel: $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 9$

Uitwerking

Je kunt het snijpunt berekenen door de lijn in de cirkel te substitueren:

$$(x-3)^2 + (-x+1+5)^2 = 9$$

Uitwerken geeft:

$$x^2 - 6x + 9 + x^2 - 12x + 36 = 9$$

Verder uitwerken:

$$2x^2 - 18x + 36 = 0$$

Delen door 2:

$$x^2 - 9x + 18 = 0$$

Ontbinden:

$$(x-6)(x-3) = 0$$

Dus:

$$x = 6 \quad of \quad x = 3$$

Invullen in $y = -x + 1$:

$$x = 6 \rightarrow \; y = -6 + 1 = -5$$

$$x = 3 \rightarrow \; y = -3 + 1 = -2$$

De snijpunten zijn dus $(6,-5)$ en $(3,-2)$.

Controleren door deze in te vullen in de cirkel en/of lijn:

lijn: $-5 = -6 + 1$ KLOPT

cirkel: $(6-3)^2 + (-5+5)^2 = 9$ KLOPT

Snijpunten van twee cirkels

Om het snijpunt van twee cirkels te berekenen moet je eerst beide cirkelvergelijkingen schrijven in de vorm:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Daarna kun je de vergelijkingen van elkaar aftrekken en x uitdrukken in y.

Voorbeeldopgave 6: Snijpunt van twee cirkels berekenen

Vind het snijpunt van de volgende twee cirkels:

Cirkel 1: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$

Cirkel 2: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 16$

Uitwerking

We schrijven eerst beide cirkels in de vorm:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Cirkel 1: $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 9$

Cirkel 2: $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 16$

Vergelijkingen van elkaar aftrekken:

Cirkel 1: $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 9$

Cirkel 2: $\underline{x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 16}$

$$0 - 2x + 3 + \ 0 - \ 8y + \ 8 = -7$$

Oftewel:

$$-2x + 3 - 8y + 8 = -7$$

x uitdrukken in y:

$$-2x = 8y - 18$$

$$x = -4y + 9$$

Deze formule invullen in de formule van één van de cirkels geeft het snijpunt:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9 \quad \rightarrow$$

$$(-4y + 9 - 2)^2 + (y-3)^2 = 9$$

Verder uitschrijven:

$(-4y + 7)^2 + (y-3)^2 = 9$

$16y^2 - 56y + 49 + y^2 - 6y + 9 = 9$

Alles naar één kant halen:

$17y^2 - 62y + 49 = 0$

Abc-formule geeft:

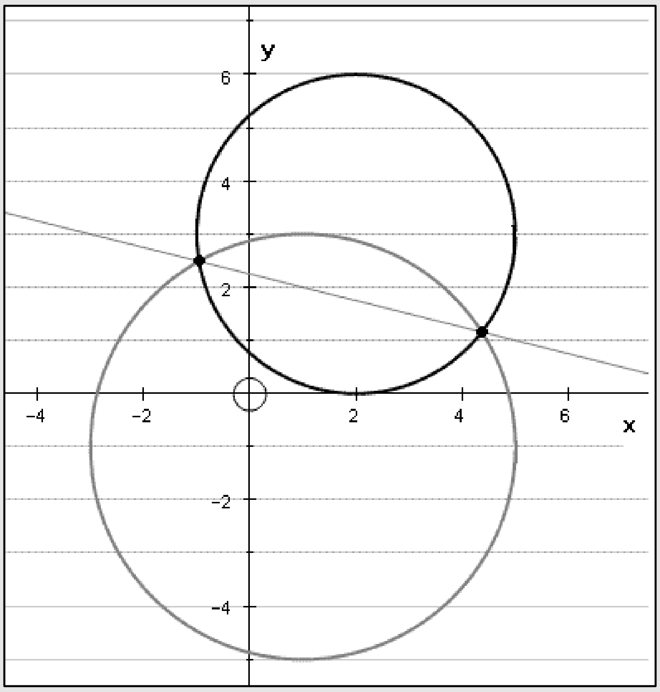
$y \approx 2{,}49 \ of \ y \approx 1{,}16$

Dit invullen in de formule $x = -4y + 9$ geeft:

$x \approx -0{,}96 \ \ of \ x \approx 4{,}37$

De twee snijpunten zijn dus:

$(-0{,}96\ ;\ 2{,}49)$ & $(4{,}37\ ;\ 1{,}16)$



Raaklijn aan een cirkel

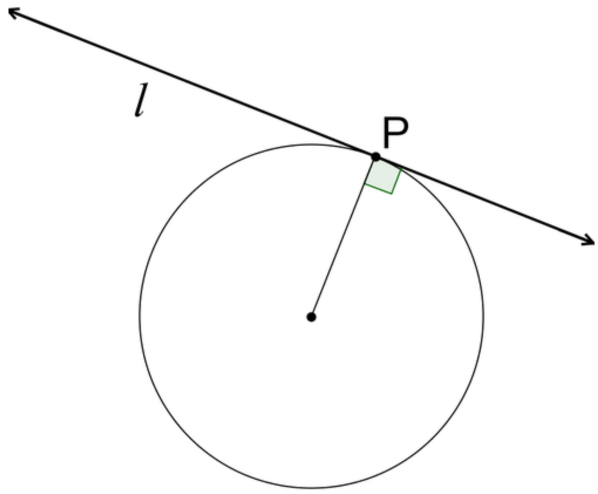
Een raaklijn in een punt op de cirkel

De lijn door punt P op de cirkel, die loodrecht staat op de straal naar punt P, kan worden berekend met behulp van de richtingscoëfficiënt:

$$r_c = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_P - y_M}{x_P - x_M}$$

Omdat de raaklijn loodrecht op de straal staat, geldt:

$$r_{c,straal} * r_{c,raaklijn} = -1$$



Nu kun je een formule in de vorm $y = ax + b$ opstellen. Bereken nu b door de x- en y-coördinaten van punt P en de richtingscoëfficiënt a in de formule in te vullen.

Voorbeeldopgave 7: Raaklijn aan een cirkel

Stel een formule op voor de raaklijn die de cirkel raakt in punt $(2{,}6)$. De formule voor de cirkel is:

$$x^2 + (y-3)^2 = 13$$

Uitwerking

Het middelpunt van de cirkel is dus $M = (0{,}3)$. Met behulp van het middelpunt en het raakpunt $(2{,}6)$ is dus de richtingscoëfficiënt van de straal te berekenen:

$$r_{c,straal} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_P - y_M}{x_P - x_M} = \frac{6-3}{2-0} = \frac{3}{2}$$

Omdat de raaklijn loodrecht op de straal staat, geldt:

$$r_{c,straal} * r_{c,raaklijn} = -1$$

Dus:

$$\frac{3}{2} * r_{c,raaklijn} = -1$$

$$r_{c,raaklijn} = -\frac{2}{3}$$

Nu kun je een formule in de vorm $y = ax + b$ opstellen:

$$y = -\frac{2}{3}x + b$$

Vul nu de x- en y-coördinaten van punt P in de formule in:

$$6 = -\frac{2}{3} * 2 + b$$

Bereken b:

$$b = 6 + \frac{4}{3} = 7\frac{1}{3}$$

De formule voor de raaklijn is dus:

$$y = -\frac{2}{3}x + 7\frac{1}{3}$$

Een raaklijn in gegeven richting

Als je de richtingscoëfficiënt al weet, kun je deze invullen in de standaardformule voor een raaklijn: $y = ax + b$. Omdat je weet dat de raaklijn op de cirkel ligt, kun je deze substitueren in de vergelijking voor de cirkel:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Met een gegeven middelpunt M(a, b). Substitueren geeft:

$$(x - a)^2 + (ax + b - b)^2 = r^2$$
$$ax^2 + bx + c = 0$$

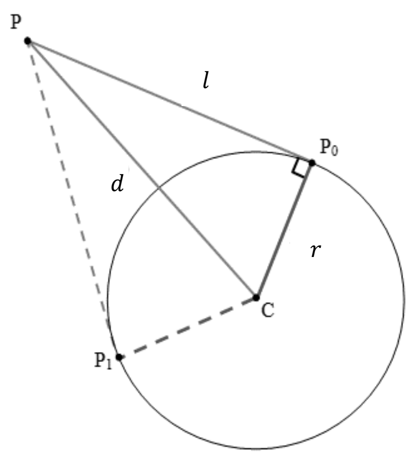
Omdat een raaklijn altijd maar één snijpunt heeft met de cirkel, is er maar één oplossing en is de discriminant dus altijd nul. Je kunt nu dus stellen:

$$b^2 - 4ac = 0$$

Hiermee kun je dus c berekenen (a en b zijn al gegeven).

Een raaklijn door een punt buiten de cirkel

Vanuit een punt P buiten de cirkel kunnen er twee raaklijnen aan de cirkel worden getekend die loodrecht op de straal staan. Als je de lengte van l en de lengte van de straal r weet, kun je met behulp van de stelling van Pythagoras de lengte d berekenen.



Voorbeeldopgave 8: Cirkel

Geef de straal en de coördinaten van het middelpunt van de volgende cirkel:

$$x^2 + y^2 = 6x + 10y - 12$$

Uitwerking

Schrijf eerst de gehele vergelijking naar links:

$$x^2 + y^2 - 6x - 10y + 12 = 0$$

Zet nu de vergelijking in de vorm:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Schrijf dus eerst de vergelijking verder uit:

$$x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 - 10y + 25 - 25 + 12 = 0$$

$$(x - 3)^2 - 9 + (y - 5)^2 - 25 + 12 = 0$$

$$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 22$$

Hieruit kun je halen dat:

$$M = (3{,}5) \quad \& \quad r = \sqrt{22}$$

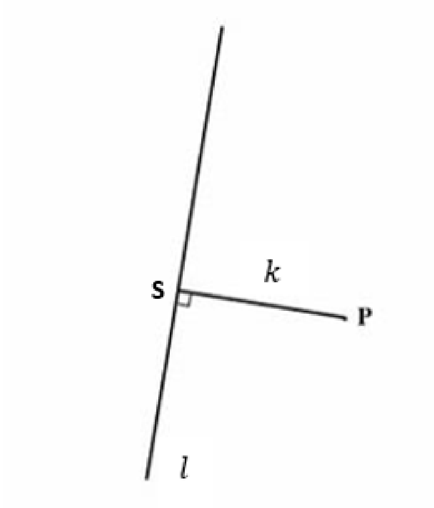
Oefenopgaven Domein E2

Vraag 1

Bereken de afstand tussen de volgende punten:

$$P = (7,4)$$

$$S = (2,5)$$



Vraag 2

Bereken algebraïsch het snijpunt van de lijn en de cirkel:

Lijn: $y = x + 2$

Cirkel: $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 4$

Vraag 3

Stel een formule op voor de raaklijn die de cirkel raakt in punt (0,6). De formule voor de cirkel is:

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 = 8$$

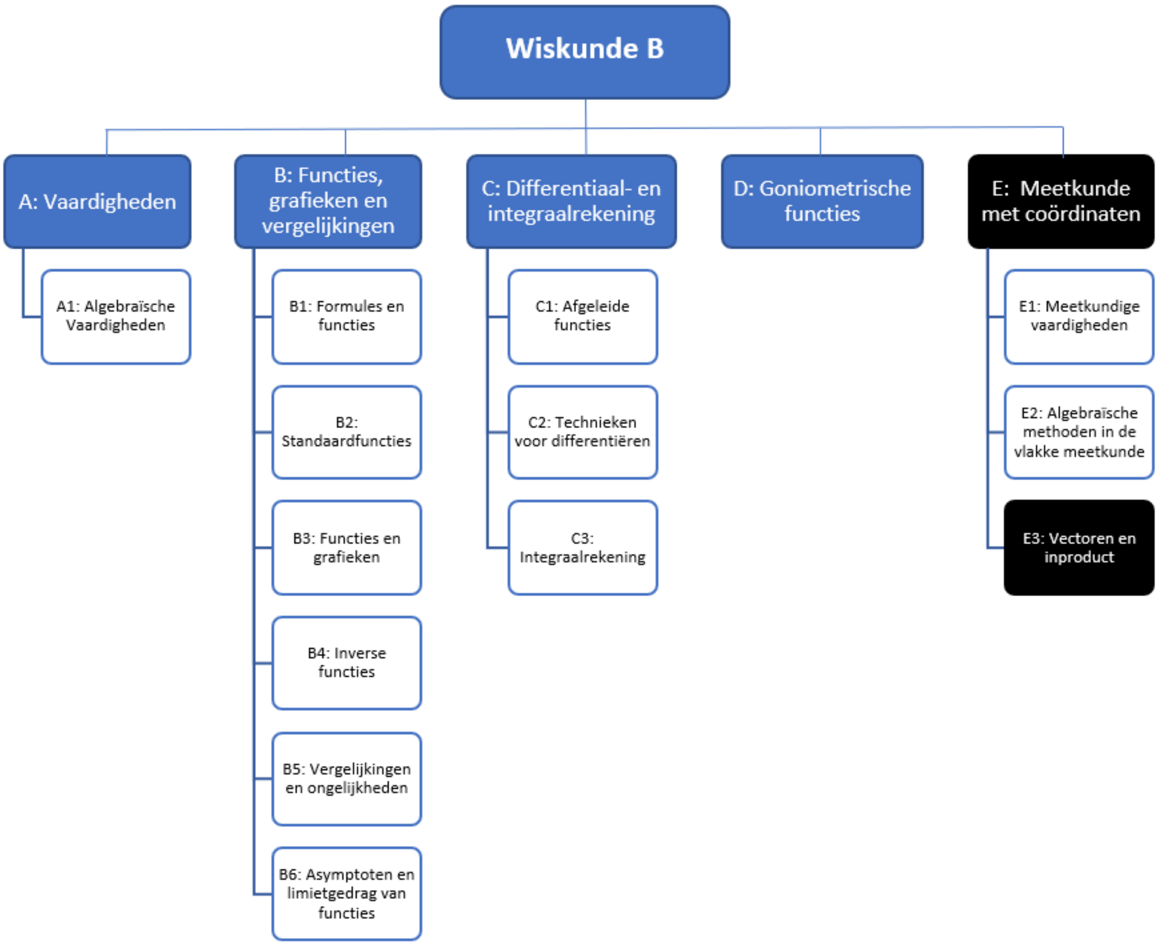
Vraag 4

Geef de straal en de coördinaten van het middelpunt van de volgende cirkel:

$$x^2 + y^2 - 4x = 8y - 8$$

Domein E3: Vectoren en inproduct

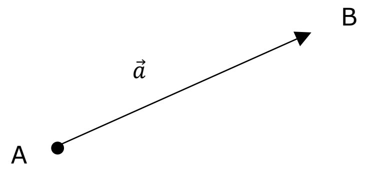
Vakoverzicht



We zijn alweer bij het laatste subdomein aanbeland. Hierna ben je helemaal klaar om het examen te maken! Dit domein gaan we met behulp van vectoren en inproducten eigenschappen van figuren in het vlak afleiden en berekeningen uitvoeren. De laatste loodjes, daar gaan ze! Nog even doorzetten, veel succes voor dit laatste stukje!

Vector

Vectoren zijn lijnstukken met een bepaalde grootte en richting. We tekenen vectoren met een pijl die in de aangegeven richting wijst en die begint in zijn aangrijpingspunt. Een vector wordt genoteerd met een pijltje erboven: $\overrightarrow{AB}$. Zo is $\overrightarrow{AB}$ de vector tussen punt A en punt B, met punt A als aangrijpingspunt. Vector $\overrightarrow{AB}$ noem je ook wel vector $\vec{a}$:

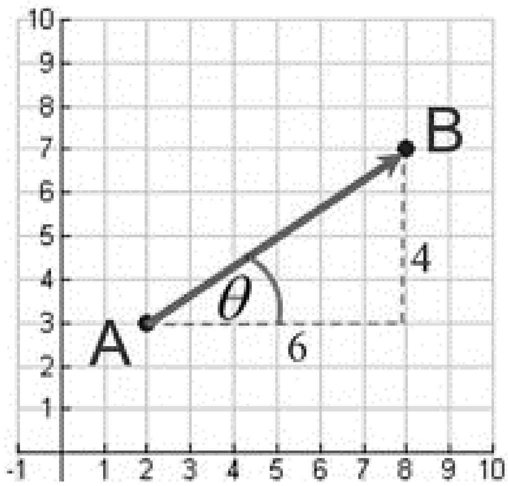


Vectoren ontbinden in componenten

Een vector kun je noteren als een getallenpaar:

$$\vec{a} = \binom{a_x}{a_y}$$

Hierin worden a_x en a_y de **kentallen** van de vector $\vec{a}$ genoemd. Dit betekent dus dat je vanuit het aangrijpingspunt a_x horizontaal naar rechts moet en a_y verticaal omhoog moet om naar punt B te komen:



Hier zie je dus dat de horizontale component, $a_x = 6$ en de verticale component, $a_y = 4$. De vector is dus:

$$\vec{a} = \binom{6}{4}$$

Je kunt de vector $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ook berekenen door de vector van punt A $\binom{2}{3}$ af te trekken van de vector van punt B $\binom{8}{7}$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \binom{8}{7} - \binom{2}{3} = \binom{6}{4}$$

Nog een beetje onduidelijk? Met deze video snap je het meteen!

Video WisBV-E3-1

Richtingshoek van een vector

Om de richtingshoek te berekenen die de vector maakt ten opzichte van de horizontale lijn moet je dus simpelweg de tan^{-1} nemen van de horizontale component en de verticale component:

$$\tan(\theta) = \frac{6}{4}$$

$$\theta = tan^{-1}(\frac{6}{4}) \approx 56{,}3°$$

Lengte van een vector

De lengte van de vector $\overrightarrow{AB}$ is ook makkelijk te berekenen als je beide kentallen weet met behulp van de stelling van Pythagoras. Om aan te geven dat het om een lengte van een vector gaat, noteer je deze altijd tussen twee rechte strepen: | |. De lengte van bovenstaande vector $\overrightarrow{AB}$ is dus:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

Vectoren optellen of aftrekken

Vectoren kun je optellen/aftrekken door de horizontale componenten bij elkaar op te tellen/af te trekken en de verticale componenten bij elkaar op te tellen/af te trekken:

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Vectoren vermenigvuldigen met een getal

Je kunt een vector vermenigvuldigen door zowel de horizontale component en de verticale component met een getal te vermenigvuldigen:

Stel:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

Dan:

$$4 * \overrightarrow{AB} = 4 * \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\12\end{pmatrix}$$

De vector wordt dan dus vier keer zo lang.

Vectoren met elkaar vermenigvuldigen

Als je vectoren met elkaar wilt vermenigvuldigen moet je gebruik maken van het **inproduct/inwendig product.** Dit schrijf je op als volgt:

Met $\vec{A} = \begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$ & $\vec{B} = \begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}$:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

Voorbeeldopgave 1: Vermenigvuldigen vectoren

Wat is het inproduct van vectoren $\vec{A}$ & $\vec{B}$?
Met:

$$\vec{A} = \binom{1}{2} \quad \& \qquad \vec{B} = \binom{2}{1}?$$

Uitwerking

Om het inproduct te berekenen moet je gebruik maken van de volgende formule:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

Invullen geeft:

$$\binom{1}{2} \cdot \binom{2}{1} = 1 * 2 + 2 * 1 = 4$$

Hoek tussen twee vectoren

Als je het inproduct tussen twee vectoren en de lengte van de vectoren weet, kun je ook de hoek, $\emptyset$, tussen de twee vectoren berekenen:

$$\cos(\emptyset) = \frac{\vec{A} * \vec{B}}{|\vec{A}| * |\vec{B}|}$$

Wil je liever zien dat iemand het voordoet? Scan dan de QR-code!

Video WisBV-E3-2

Voorbeeldopgave 2: Hoek tussen twee vectoren

Wat is de hoek tussen de vectoren $\vec{A}$ & $\vec{B}$?
Met:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \& \qquad \vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}?$$

Uitwerking
We moeten eerst de lengtes van de vectoren berekenen:

$$|\vec{A}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Om het inproduct te berekenen moet je gebruik maken van de volgende formule:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

Invullen geeft:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 * 2 + 2 * 1 = 4$$

Als je het inproduct $(\vec{A} \cdot \vec{B} = 4)$ tussen twee vectoren en de lengte $(|\vec{A}| = \sqrt{5}$ en $|\vec{B}| = \sqrt{5})$ van de vectoren weet, kun je ook de hoek, $\emptyset$, tussen de twee vectoren berekenen:

$$\cos(\emptyset) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} = \frac{4}{\sqrt{5} * \sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

De hoek $\emptyset$ tussen vector $\vec{A}\ en\ \vec{B}$ is dan:

$$\emptyset = \cos^{-1}(\frac{4}{5}) \approx 36{,}8\ graden$$

Lijnen

Vector uit een lijn

Je kunt een lijn $(y = ax + b)$ ook omschrijven tot een vector, met als notatie:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{s_k} + \lambda * \vec{r_k}$$

Met:

$$\vec{s_k} = steunvector$$

$$\vec{r_k} = richtingsvector$$

Hierin is de steunvector, $\vec{s_k}$, een willekeurig punt op de lijn. De richtingsvector, $\vec{r_k}$, is altijd $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$, want als je 1 stapje naar rechts gaat, ga je a stapjes verticaal.

Video WisBV-E3-3

Misschien snap je het nóg beter als je deze video met voorbeeld kijkt!

Voorbeeldopgave 3: Vector uit een lijn

Schrijf de lijn $y = 5x + 3$ om tot een vector, met als notatie:

$$\binom{x}{y} = \overrightarrow{s_k} + \lambda * \overrightarrow{r_k}$$

Uitwerking

Kies een willekeurig punt op de lijn. Als je bijvoorbeeld invult $x = 1$ dan krijg je:

$$y = 5x + 3 = 5 * 1 + 3 = 8$$

Het willekeurige punt op de lijn, de steunvector, $\overrightarrow{s_k} = \binom{1}{8}$

De richtingsvector, $\overrightarrow{r_k}$, is altijd $\binom{1}{a}, dus\ \overrightarrow{r_k} = \binom{1}{5}$

De vector wordt dan:

$$\binom{x}{y} = \overrightarrow{s_k} + \lambda * \overrightarrow{r_k} = \binom{1}{8} + \lambda * \binom{1}{5}$$

Hoek tussen twee lijnen

Als je de hoek tussen twee lijnen (l en k) wilt berekenen kun je weer gebruik maken van het inproduct. Let wel op dat je altijd de kleinste hoek tussen de lijnen kiest! Daarom wordt het inproduct opgeschreven tussen absoluutstrepen:

$$\cos(\emptyset) = \frac{|\overrightarrow{r_k} * \overrightarrow{r_l}|}{|\overrightarrow{r_k}| * |\overrightarrow{r_l}|} = \frac{r_{k,x} * r_{l,x} + r_{k,y} * r_{l,y}}{\sqrt{r_{k,x}^2 + r_{k,y}^2} + \sqrt{r_{l,x}^2 + r_{l,y}^2}}$$

Als twee lijnen loodrecht zijn, is de hoek dus altijd 90 graden. Hieruit volgt dat het inproduct nul moet zijn. Vandaar geldt voor twee loodrechte lijnen:

$$\overrightarrow{r_k} * \overrightarrow{r_l} = 0$$

Even geen idee wat je hier nou mee aan moet? Deze video helpt je misschien nog een handje!

Video WisBV-E3-4

Normaalvector

Een normaalvector $\overrightarrow{n_l}$ is de vector die loodrecht op de lijn (l) staat. Deze kun je berekenen met behulp van de volgende formule:

$$\overrightarrow{n_l} * \overrightarrow{r_l} = 0$$

Als bijvoorbeeld $\overrightarrow{r_l} = \binom{2}{4}$, dan is de normaalvector dus $\overrightarrow{n_l} = \binom{-4}{2}$. Want:

$$\binom{2}{4} * \binom{-4}{2} = 2 * -4 + 4 * 2 = 0$$

Vergelijking van een lijn opstellen

Als je de normaalvector $\overrightarrow{n_l}$ van lijn l weet, is het heel makkelijk om de vergelijking van de lijn op te stellen. Bij $\overrightarrow{n_l} = \binom{-4}{2}$ hoort bijvoorbeeld een vergelijking van:

$$-4x + 2y = c$$

Hierin kun je c berekenen door de coördinaten van een punt op de lijn in te vullen in x en y.

Parametervoorstelling

Door een lijn te ontbinden in x en y componenten kun je de parametervoorstelling van een lijn opstellen.

Lijn:

$$l\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Parametervoorstelling:

$$l\colon \begin{cases} x = a + ct \\ y = b + dt \end{cases}$$

Voorbeeldopgave 4: Parametervoorstelling

Bepaal de parametervoorstelling van de volgende lijn:

$$l\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Uitwerking

De parametervoorstelling krijg je door de lijn hetzelfde om te schrijven als hierboven wordt uitgelegd:

$$l\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \rightarrow \; l\colon \begin{cases} x = a + ct \\ y = b + dt \end{cases}$$

Dus de parametervoorstelling van lijn l ($\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$) is:

$$l\colon \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$$

Tijdsafhankelijke vectorvoorstelling

Een tijdsafhankelijke vectorvoorstelling met kentallen $x(t)$ en $y(t)$ beschrijft de baan van een bewegend punt:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t^2 + 4t \\ t^3 - 5 \end{pmatrix}$$

Vectoriele snelheid van een tijdsafhankelijke vectorvoorstelling

De snelheid van een tijdsafhankelijke vectorvoorstelling kun je gemakkelijk berekenen door de vectorvoorstelling te differentiëren:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t + 4 \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

Vectoriele versnelling van een tijdsafhankelijke vectorvoorstelling

De versnelling van een tijdsafhankelijke vectorvoorstelling kun je gemakkelijk berekenen door de vectoriele snelheid te differentiëren.

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6t \end{pmatrix}$$

Voorbeeldopgave 5: Vectoriele versnelling

Gegeven is de volgende tijdsafhankelijke vectorvoorstelling:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t^2 \\ 2t^3 - 4 \end{pmatrix}$$

Bepaal de vectoriele versnelling van deze vectorvoorstelling.

Uitwerking

De versnelling van een tijdsafhankelijke vectorvoorstelling kun je gemakkelijk berekenen door de vectoriele snelheid te differentiëren. Daarvoor moeten we deze natuurlijk eerst uitrekenen:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12t \\ 6t^2 \end{pmatrix}$$

Vervolgens kunnen we de vectoriele versnelling berekenen:

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12t \end{pmatrix}$$

De raaklijn

De snelheidsvector wijst altijd in dezelfde richting als de baan. Zo kun je gemakkelijk de raaklijn van een bepaalde baan berekenen, aangezien:

$$rc_k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Je kunt ook de grootte van de baansnelheid berekenen. Dit doe je weer met behulp van de stelling van Pythagoras:

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}$$

Voorbeeldopgave 6: Raaklijn

Gegeven is de volgende tijdsafhankelijke vectorvoorstelling:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t^2 \\ 2t^3 - 4 \end{pmatrix}$$

Bepaal de raaklijn.

Uitwerking

Formule voor de raaklijn:

$$rc_k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Waar:

$$x'(t) = 12t$$

$$y'(t) = 6t^2$$

Invullen geeft:

$$rc_k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{6t^2}{12t} = \frac{t}{2}$$

Zwaartepunten

Het **zwaartepunt** van een object is het punt ten opzichte waarvan de massa van dat object in evenwicht is. Een lichaam beweegt zich dus alsof alle massa zich bevindt in het zwaartepunt. Bij vectoren met allemaal een eigen massa m en plaatsvector $\vec{a}$, geldt:

Het zwaartepunt,

$$\vec{Z} = \frac{1}{M}(m_1 * \vec{a}_1 + m_2 * \vec{a}_2 + \cdots .. + m_n * \vec{a}_n)$$

Waar de totale massa,

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

Nog even een voorbeeld zien? Check dan deze video!

Video WisBV-E3-5

Voorbeeldopgave 7: Versnelling

Gegeven is de volgende vectorvoorstelling:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t^4 + 3t \\ \frac{1}{2}t^3 - 5t \end{pmatrix}$$

Bepaal de versnelling.

Uitwerking

De snelheid van een tijdsafhankelijke vectorvoorstelling kun je gemakkelijk berekenen door de vectorvoorstelling te differentiëren:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24t^3 + 3 \\ \frac{3}{2}t^2 - 5 \end{pmatrix}$$

De versnelling van een tijdsafhankelijke vectorvoorstelling kun je gemakkelijk berekenen door de vectoriele snelheid te differentiëren.

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72t^2 \\ 3t \end{pmatrix}$$

Oefenopgaven Domein E3

Vraag 1
Wat is het inproduct van vectoren $\vec{a}$ & $\vec{b}$?
Met:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \& \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}?$$

Vraag 2
Bereken de hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ & $\vec{b}$ in één decimaal nauwkeurig in graden.
Met:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \& \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vraag 3
Bepaal de parametervoorstelling van de volgende lijn:

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vraag 4
Gegeven is de volgende tijdsafhankelijke vectorvoorstelling:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t^2 + 3t + 4 \\ 6t^3 \end{pmatrix}$$

Bepaal de vectoriele versnelling van deze vectorvoorstelling.

Vraag 5
Gegeven is de volgende tijdsafhankelijke vectorvoorstelling:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12t^2 - 4t + 10 \\ 2t^3 - 4t^2 + 6 \end{pmatrix}$$

Druk de rc van de raaklijn aan de baan uit in t.

Afsluiting Domein E

Log in op onze website www.examengevat.nl, ga naar Mijn Account > Mijn leeromgeving > het desbetreffende vak en domein. Of… **scan onderstaande QR-code, dan kom je meteen bij de oefenvragen van Domein E van Wiskunde B – VWO (vergeet niet eerst in te loggen!):**

OEFENVRAGEN WB -V

Examens oefenen

Lekker bezig, je hebt nu alle stof behandeld. Tijd om te oefenen! Hierna volgen een paar oude examens. Nog meer oude examens oefenen? We hebben nog veel meer oefenmateriaal voor je klaar staan op je persoonlijke leeromgeving! Je kunt aan de gang met maar liefst 10 volledige oude examens, waarbij we de antwoorden volledig stap-voor-stap hebben uitgewerkt.

Log in op onze website www.examengevat.nl, ga naar Mijn Account > Mijn leeromgeving > het desbetreffende vak, dan staan ze onderaan.

Of… **scan onderstaande QR-code, dan kom je meteen bij de alle oefenexamens van Wiskunde B – VWO (vergeet niet eerst in te loggen!):**

OEFENEXAMENS WB -

Oefenexamen

Examen VWO

2019

tijdvak 1
maandag 20 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B

Dit examen bestaat uit 15 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 80 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

VW-1025-a-19-1-o

Formules

Goniometrie

$$\sin(t+u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)$$
$$\sin(t-u) = \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)$$
$$\cos(t+u) = \cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)$$
$$\cos(t-u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)$$

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$$
$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$$

Lijnen door de oorsprong en een cirkel

Gegeven is cirkel c met middelpunt $(1, 7)$ en straal 5.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ is een vectorvoorstelling van een lijn k door de oorsprong.

Lijn k snijdt cirkel c in twee punten.

5p **1** Bereken exact de coördinaten van deze snijpunten.

Rechts van het snijpunt

De functies f en g zijn gegeven door:

$$f(x) = 3\cos(2x) - \sqrt{2x} \quad \text{en}$$

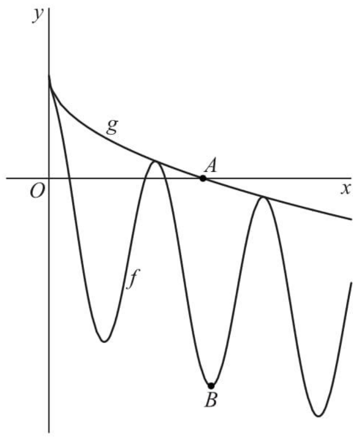
$$g(x) = 3 - \sqrt{2x}$$

De grafiek van g snijdt de x-as in punt A.
De grafiek van f heeft diverse toppen, alle met een positieve x-coördinaat.
Punt B is de derde van deze toppen.
Zie de figuur.

Er geldt: punt B ligt rechts van punt A.

5p **2** Toon dit aan met behulp van de afgeleide van f.

figuur



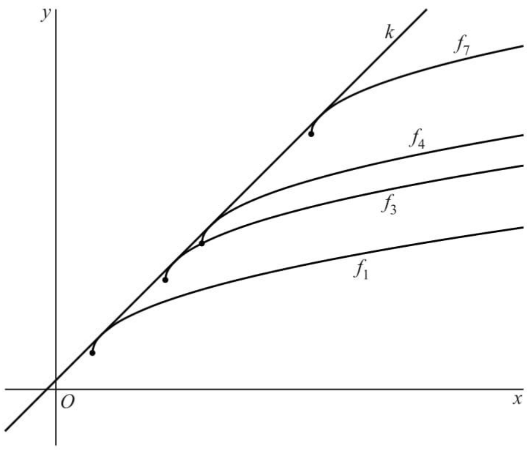
Altijd raak

Voor $p \geq 1$ is de functie f_p gegeven door:

$$f_p(x) = p + \sqrt{x - p}$$

In figuur 1 is voor enkele waarden van p de grafiek van f_p weergegeven en ook lijn k met vergelijking $y = x + \frac{1}{4}$.

figuur 1



Lijn k raakt de grafiek van f_p voor elke waarde van $p \geq 1$.

5p **3** Bewijs dit.

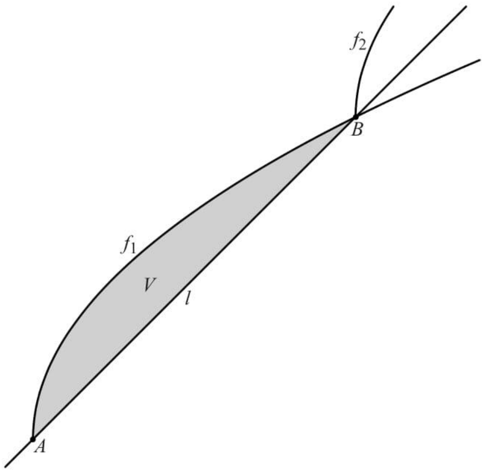
Voor $p \geq 1$ heeft de grafiek van f_p een randpunt, ook wel beginpunt genoemd. De randpunten van de grafieken in figuur 1 zijn met een stip aangegeven.

Er geldt voor elke $p \geq 1$: het randpunt van de grafiek van f_p ligt op de grafiek van f_{p-1}.

3p **4** Bewijs dat inderdaad voor $p \geq 1$ geldt: het randpunt van de grafiek van f_p ligt op de grafiek van f_{p-1}.

Punt $A(1, 1)$ is het randpunt van de grafiek van f_1. Punt $B(2, 2)$ is het randpunt van de grafiek van f_2. B ligt dus op de grafiek van f_1.
Door de punten A en B gaat een lijn l.
V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door lijn l en de grafiek van f_1.
Zie figuur 2.

figuur 2



5p **5** Bereken exact de oppervlakte van V.

Slingshot

De Slingshot is een kermisattractie.
Tussen de toppen van twee palen hangt aan twee identieke elastische koorden een capsule die plaats biedt aan twee personen. Zie de foto.
De capsule wordt allereerst omlaag getrokken tot aan de grond. Op dat moment gaan er twee personen in de capsule zitten. Vervolgens wordt de capsule losgelaten. De capsule schiet dan recht omhoog. Daarna valt hij recht omlaag, gaat weer omhoog, enzovoorts. Na enige tijd komt de capsule stil te hangen.

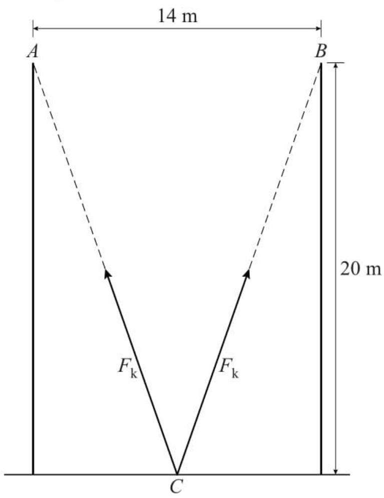
foto

Gegeven is:
- De palen staan 14 m uit elkaar.
- De palen staan verticaal.
- De palen zijn 20 m hoog.
- Zonder uitrekking heeft elk koord een lengte van 8 m.
- Elk koord trekt aan de capsule met een kracht die afhangt van de lengte van het uitgerekte koord. De grootte van deze kracht kan berekend worden met de formule:

  $$F_k = 0{,}6 \cdot (L - 8)$$

  Hierbij is F_k de grootte van de kracht in kN (kilonewton) en L de lengte van het uitgerekte koord in m (met $L \geq 8$).

figuur 1



In figuur 1 is de beginsituatie weergegeven. De capsule is aangegeven met het punt C en de toppen van de palen met A en B.
De capsule bevindt zich op de grond, midden tussen de palen.
Beide koorden, CA en CB, zijn dan flink uitgerekt en staan strak.

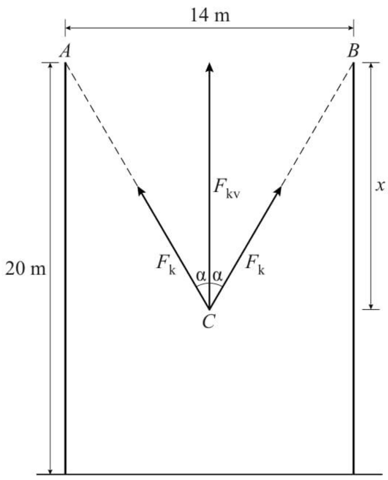
3p **6** Bereken de grootte van de kracht in kN waarmee een koord in de beginsituatie aan de capsule trekt. Geef je eindantwoord in één decimaal.

De twee krachten kun je weergeven met twee vectoren.
De som van deze twee vectoren is een vector die een verticale kracht weergeeft met grootte F_{kv}. De grootte van deze kracht kan berekend worden met de volgende formule:

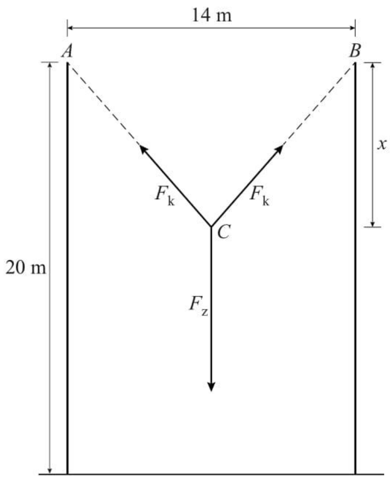
$$F_{kv} = 2 \cdot F_k \cdot \cos(\alpha)$$

Hierin is α de hoek tussen een koord en de verticale vector. Zie figuur 2.

figuur 2



figuur 3



Op de capsule, inclusief de twee personen, werkt niet alleen de kracht van beide koorden, maar ook de zwaartekracht F_z, die recht naar beneden is gericht. Zie figuur 3. Deze zwaartekracht bedraagt 1,8 kN.
In figuur 2 en figuur 3 is ook het hoogteverschil tussen C en de toppen van de palen met x aangegeven.

Na een aantal keren op en neer te zijn geslingerd, is de capsule tot stilstand gekomen. Op dat moment heft de zwaartekracht de twee krachten op die door de koorden samen worden uitgeoefend.
Er geldt dan dus: $F_{kv} = F_z$

De hoogte waarop de capsule tot stilstand komt, is te berekenen door eerst F_{kv} in x uit te drukken.

6p **7** Druk F_{kv} uit in x en bereken daarmee hoe hoog de capsule boven de grond hangt als hij tot stilstand is gekomen. Geef je eindantwoord in gehele meters.

Een logaritmische functie en haar afgeleide

De functies f en g worden gegeven door:

$$f(x) = x\ln(x) - x + 1$$
$$g(x) = f'(x)$$

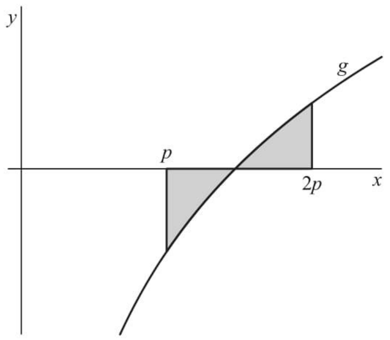
5p **8** Bereken exact de x-coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g.

Er is één waarde van p waarvoor geldt:

$$\int_{p}^{2p} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Voor deze waarde van p is de situatie in de figuur geschetst.

figuur



7p **9** Bereken exact deze waarde van p. Schrijf je eindantwoord in de vorm $p = a\mathrm{e}$, waarbij a een getal is.

Gebroken goniometrische functie

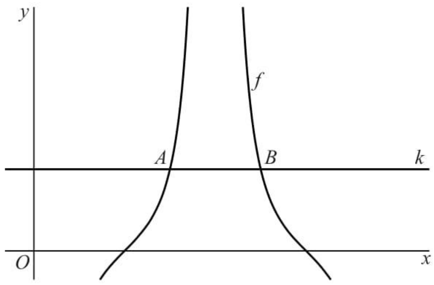
De functie f is gegeven door:

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{-\sin^2(x)}$$

Lijn k is de lijn met vergelijking $y = \sqrt{2}$.

Lijn k en de grafiek van f hebben oneindig veel snijpunten. De punten A en B zijn de twee snijpunten met de kleinste positieve x-coördinaten. Deze zijn in figuur 1 aangegeven.

figuur 1



6p **10** Bereken exact de x-coördinaten van A en B.

Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door:

$$f_p(x) = \frac{\cos(x)}{p - \sin^2(x)}$$

6p **11** Onderzoek of er waarden van p zijn waarvoor de grafiek van f_p perforaties heeft.

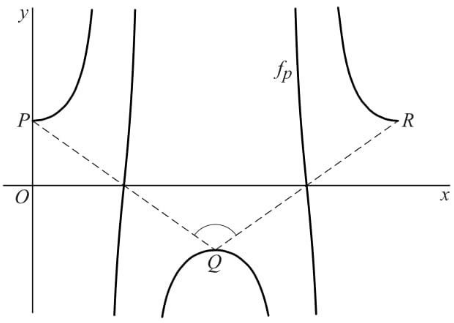
In de rest van de opgave beperken we ons tot waarden van p waarvoor geldt: $p \neq 0$

De punten op de grafiek van f_p met x-coördinaten 0, π en 2π noemen we respectievelijk P, Q en R.

In figuur 2 is voor een waarde van p de grafiek van f_p weergegeven.

Ook zijn de lijnstukken PQ en QR weergegeven.

figuur 2



Er zijn waarden van p waarvoor PQ en QR loodrecht op elkaar staan.

4p **12** Bereken exact deze waarden van p.

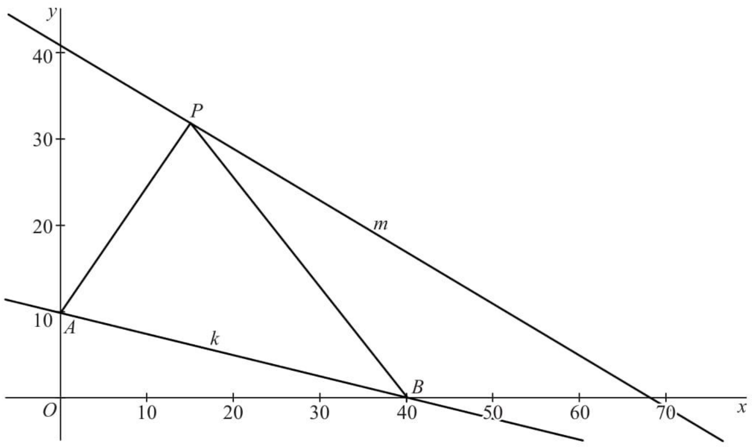
Driehoek met bewegend hoekpunt

Lijn k gaat door de punten $A(0, 10)$ en $B(40, 0)$.
De baan van een punt P is gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x = 18 + 5t \\ y = 30 - 3t \end{cases}$$

De baan van punt P is de lijn m. Zie de figuur.

figuur



Bij bijna elke positie van punt P vormen de punten A, B en P een driehoek ABP. Er is één uitzondering.

5p **13** Bereken de coördinaten van P zodat A, B en P niet de hoekpunten van een driehoek vormen.

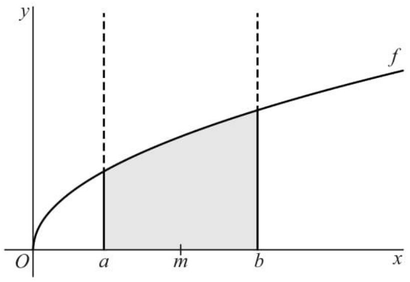
8p **14** Onderzoek op algebraïsche wijze of er een positie van P is, zó dat driehoek ABP een rechte hoek heeft bij P én driehoek ABP een gelijkbenige driehoek is.

Afgeknotte paraboloïde

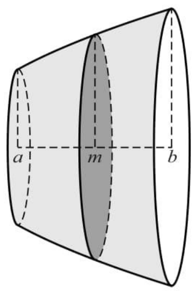
De functie f is gegeven door $f(x) = \sqrt{x}$. De grafiek van f is getekend in figuur 1, samen met de lijnen met vergelijkingen $x = a$ en $x = b$, waarbij $0 < a < b$. Midden tussen de punten $(a, 0)$ en $(b, 0)$ ligt het punt $(m, 0)$.

De grafiek van f, de x-as en de twee verticale lijnen sluiten een gebied in. Dit gebied, in figuur 1 met grijs aangegeven, wordt gewenteld om de x-as. Het omwentelingslichaam is een zogenaamde **afgeknotte paraboloïde**. Deze is afgebeeld in figuur 2.

figuur 1



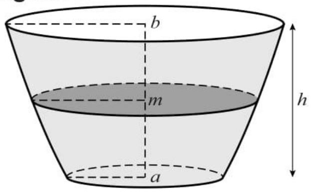
figuur 2



Bij de omwenteling beschrijft elk punt van de grafiek een cirkel.
De oppervlakte van de cirkel die beschreven wordt door het punt $(m, \sqrt{m})$ noemen we A. De cirkelschijf met deze oppervlakte is met donkergrijs aangegeven in figuur 2.

In figuur 3 staat de afgeknotte paraboloïde een kwartslag gedraaid. In die figuur is ook de hoogte h van de afgeknotte paraboloïde aangegeven.

figuur 3



Voor de inhoud V van de afgeknotte paraboloïde geldt de formule:

$$V = h \cdot A$$

7p **15** Bewijs dit.

Uitwerkingen oefenopgaven

Uitwerkingen domein A

Vraag 1

Gegeven:

$$2(4x\ +\ 2)(x\ +\ 3)$$

Gebruik eerst de methode zoals hiervoor is uitgelegd om de haakjes weg te werken:

$$\mathbf{2(4x\ +\ 2)(x\ +\ 3)}$$

$$\mathbf{2\left(4x^2\ +\ 12x\ +\ 2x\ +\ 6\right)}$$

Nu kun je alles binnen de haakjes samenvoegen en vervolgens het getal voor de haakjes vermenigvuldigen met alles wat in de haakjes staat:

$$\mathbf{2(4x^2\ +\ 14x\ +\ 6)}\ =$$

$$\mathbf{8x^2 + 28x\ +\ 12}$$

Vraag 2

Gegeven:

$$\mathbf{(4x\ +\ 2)(4x - 2)}$$

Voor deze formule kun je de regel van merkwaardige producten gebruiken:

$$(A + B) * (A - B) = A^2 - B^2$$

Met $A = 4x$ en $B = 2$. Invullen geeft vervolgens dus:

$$\mathbf{(4x\ +\ 2)(4x - 2)} =$$

$$\mathbf{(4x)^2 - 2^2} =$$

$$\mathbf{16x^2 - 2^2} =$$

$$16x^2 - 4$$

Een andere optie is om gewoon de haakjes weg te werken:

$$\mathbf{(4x\ +\ 2)(4x - 2)}$$

Dit uitschrijven geeft:

$$\mathbf{(4x\ +\ 2)(4x - 2)} =$$

$$\mathbf{4x * 4x + 4x * -2 + 2 * 4x + 2 * -2} =$$

$$16x^2 - 8x + 8x - 4 =$$

$$16x^2 - 4$$

Vraag 3
Vereenvoudig deze breuk zo ver mogelijk:

$$\frac{30}{72}$$

Je maakt de teller en noemer zo klein mogelijk:

$$\frac{30}{72} = \frac{15}{36} \quad \textit{gedeeld door } 2$$

$$\frac{15}{36} = \frac{5}{12} \quad \textit{gedeeld door } 3$$

Vraag 4
Vereenvoudig deze breuk zo ver mogelijk:

$$A - \frac{B}{C} + \frac{A}{B}$$

Voor optellen/aftrekken moet de noemer van elke breuk dezelfde waarde hebben. Je ziet in deze formule in feite drie breuken:

1. A, welke een geheel getal is en dus in feite $\frac{A}{1}$
2. $-\frac{B}{C}$
3. $+\frac{A}{B}$

We gaan voor elk van deze drie breuken de noemer gelijk maken. We gebruiken daarvoor de formule voor het optellen van breuken van je formuleblad:

$$\frac{A * C * B}{1 * C * B} - \frac{B * 1 * B}{1 * C * B} + \frac{A * 1 * C}{B * C * 1}$$

Teller Breuk 1: A vermenigvuldigd met noemers C en B

Noemer Breuk 1: 1 vermenigvuldigd met noemers C en B

Teller Breuk 2: B vermenigvuldigd met noemers 1 en B

Noemer Breuk 2: C vermenigvuldigd met noemers 1 en B

Teller Breuk 3: C vermenigvuldigd met noemers 1 en C

Noemer Breuk 3: B vermenigvuldigd met noemers 1 en C

Oftewel:

$$\frac{A * C * B}{C * B} - \frac{B * B}{C * B} + \frac{A * C}{B * C}$$

Nu alle noemers hetzelfde zijn, kun je de breuken bij elkaar optellen/aftrekken:

$$\frac{A * C * B}{C * B} - \frac{B * B}{C * B} + \frac{A * C}{B * C} = \frac{A * C * B - B^2 + A * C}{B * C} = \frac{AC(B + 1) - B^2}{BC}$$

Vraag 5
Vereenvoudig deze breuk zo ver mogelijk:

$$\frac{\frac{2}{6}}{4} * \frac{5}{3}$$

Als eerste is het verstandig om de 4 om te schrijven in de breukvorm $4/1$:

$$\frac{\frac{2}{6}}{\frac{4}{1}} * \frac{5}{3}$$

Bij delen geldt de regel dat dit hetzelfde is als vermenigvuldigen met het omgekeerde van de onderste breuk. Je "klapt" de noemer om:

$$\frac{\frac{2}{6}}{\frac{4}{1}} = \frac{2}{6} * \frac{1}{4}$$

Dit zorgt voor een de totale formule van:

$$\frac{2}{6} * \frac{1}{4} * \frac{5}{3} = \frac{2 * 1 * 5}{6 * 4 * 3} = \frac{10}{72} = \frac{5}{36}$$

Vraag 6
Gegeven:

$$5 + \frac{2x - 3}{2x} = -2$$

Zorg eerst dat er één vergelijking staat door de 5 naar de andere kant te brengen:

$$\frac{2x - 3}{2x} = -7$$

Zorg vervolgens dat aan beide kanten van het = teken een breuk staat:

$$\frac{2x - 3}{2x} = -\frac{7}{1}$$

Kruislings vermenigvuldigen geeft:

$$2x - 3 = -7 * 2x$$

$$2x - 3 = -14x$$

Schrijf nu alle x naar één kant en alle getallen zonder x naar de andere kant:

$$2x + 14x = 3$$

$$16x = 3$$

$$x = \frac{3}{16}$$

Vraag 7
Los de volgende vergelijking op:

$$\sqrt{2x + 8} = x$$

Begin met het kwadrateren van de hele vergelijking:

$$2x + 8 = x^2 \text{ met } 2x + 8 \geq 0$$

Schrijf nu alles naar één kant:

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

Nu gaan we ontbinden in factoren, oftewel de x tussen haakjes zetten. Even een opfrisser hoe dit moet! We gebruiken hiervoor de **product-som-methode**. We gaan op zoek naar twee waarden die als je ze bij elkaar optelt -2 zijn (*som*) en als je ze vermenigvuldigt -8 zijn (*product*). Het is altijd het tweede stukje in een kwadratische vergelijking (in ons voorbeeld $-2x$) dat de som is, en altijd het derde stukje (in ons voorbeeld -8) dat het product is.

Het zou dus logischer zijn geweest om het de ***som-product-methode*** te noemen, dan staan de twee aspecten in dezelfde volgorde als je ze moet toepassen in zo'n kwadratische formule. Het mag helaas niet zo zijn, maar neem het mee als je hier nog wat moeite mee hebt.

Dus, we gaan op zoek naar twee waarden die opgeteld -2 zijn en als je ze met elkaar vermenigvuldigt -8 is. Even wat hoofdrekenen geeft -4 en 2:

$$(x-4)(x+2)=0$$

Dus:

$$x = 4 \; of \; x = -2$$

De wortel moet positief zijn, dus $\sqrt{2x+8} \geq 0$. Hiervoor moet het getal dat in de wortel staat dus ook groter zijn dan 0:

$$2x+8 \geq 0$$

We moeten de uitkomsten controleren omdat je gekwadrateerd hebt. Dan bestaat er de mogelijkheid dat je een oplossing krijgt die een negatief getal onder het wortelteken levert.

Voor $x = 4$ is het getal onder de wortel:

$2 * 4 + 8 = 16$ $\qquad POSITIEF$

Verder geldt:

$$\sqrt{2 * 4 + 8} = 4$$

Voor $x = -2$ is het getal onder de wortel:

$2 * -2 + 8 = 4$ $\qquad POSITIEF$

Verder geldt:

$$\sqrt{2 * -2 + 8} \neq -2$$

Dus 4 is goedgekeurd en -2 niet.

Vraag 8
Schrijf de volgende uitdrukkingen als één macht:

$$\frac{x^6}{x^7 * x^2}$$

We gebruiken de bovenstaande rekenregels om dit op te lossen. In dit geval kunnen we het beste eerst deze toepassen:

$$a^p * a^q = a^{p+q}$$

Dan krijgen we namelijk:

$$\frac{x^6}{x^7 * x^2} = \frac{x^6}{x^9}$$

Vervolgens kunnen we de rekenregel die gebruikt wordt met delen toepassen:

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

Dit geeft in ons geval:

$$\frac{x^6}{x^9} = x^{6-9} = x^{-3}$$

Vraag 9
Vereenvoudig de volgende uitdrukking:

$$\log(6^5) + \log(\frac{2}{12})$$

Kijk weer goed naar de rekenregels en welke het handigst is om te gebruiken. Wij zijn begonnen met deze:

$$n * {}^{g}\log(a) = {}^{g}\log(a^n)$$

Als we deze gebruiken in onze opgave krijgen we dat het eerste deel wordt:

$$\log(6^5) = 5 * \log(6)$$

En het tweede deel wordt:

$$\log(\frac{2}{12}) = \log(\frac{1}{6}) = \log(6^{-1}) = -1 * \log(6)$$

Dit invullen in de gehele opgave geeft:

$$5 * \log(6) - 1 * \log(6) = 4 * \log(6)$$

Een andere manier om deze vergelijking op te lossen is met de rekenregel over optellen:

$${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(ab)$$

In dit geval krijgen we dan:

$$\log(6^5) + \log(\frac{2}{12}) = \log(6^5 * \frac{2}{12}) = \log(1296)$$

Dit heeft hetzelfde antwoord, want:

$$\log(1296) = \log(6^4) = 4 * \log(6)$$

Vraag 10
Los de volgende vergelijking op:

$$(x^2 - 11x + 28)\sqrt{x} = 0$$

Oplossen:

$$(x^2 - 11x + 28) = 0 \quad of \quad \sqrt{x} = 0$$

$$x^2 - 11x + 28 = 0 \quad of \quad x = 0$$

We gaan nu $x^2 - 11x + 28 = 0$ oplossen.

Omdat er een vergelijking staat met achter het = teken een nul kunnen we gaan ontbinden in factoren, oftewel de x tussen haakjes zetten. We gebruiken hiervoor de **product-som-methode**.

We gaan op zoek naar twee waarden die opgeteld -11 zijn en als je ze met elkaar vermenigvuldigt 28 is. Even wat hoofdrekenen geeft -7 en -4:

$$(x-7)(x-4) = 0$$

Dus:

$$x = 7 \quad of \quad x = 4$$

Dit geeft dus een totale oplossing:

$$x = 7 \quad of \quad x = 4 \quad of \quad x = 0$$

Vraag 11
Los de volgende vergelijking op:

$$\sqrt{-2x+17} = x - 1$$

Begin met het kwadrateren van de hele vergelijking:

$$-2x + 17 = (x-1)^2$$

$$-2x + 17 = x^2 - 2x + 1$$

Schrijf nu alles naar één kant:

$$x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \sqrt{16} \quad of \quad x = -\sqrt{16}$$

$$x = 4 \quad of \quad x = -4$$

De wortel moet positief zijn, dus $\sqrt{-2x+17} \geq 0$. Hiervoor moet het getal dat in de wortel staat dus ook groter zijn dan 0:

$$-2x + 17 \ \geq 0$$

We gaan nu controleren of de twee uitkomsten wel mogen, want je hebt gekwadrateerd en dan kan er een oplossing bij komen die niet kan.

Voor $x = 4$:

$\sqrt{-2 * 4 + 17} = \sqrt{9} = 3$ $\qquad$ $klopt$

Voor $x = -4$:

$\sqrt{-2 * -4 + 17} = \sqrt{25} = 5$ $\qquad$ $klopt\ niet$

Dus alleen $x = 4$ is goedgekeurd.

Vraag 12
Los de volgende vergelijking op:

$$\frac{1}{(4x+3)^2} = \frac{1}{2}$$

Kruislings vermenigvuldigen:

$$2 = (4x+3)^2$$

$$2 = 16x^2 + 24x + 9$$

$$16x^2 + 24x + 7 = 0$$

We gebruikten eerder de ***som-product-methode***, weet je nog? We zeiden toen al dat deze som-product-methode niet altijd werkt. Dat is hier het geval. Dus we gaan het proberen met **abc-formule**:

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$$

Hierbij is het gedeelte onder de wortel de discriminant D:

$$D = b^2 - 4ac$$

We gaan nu $16x^2 + 24x + 7 = 0$ oplossen.

$$a = 16$$

$$b = 24$$

$$c = 7$$

$$D = 24^2 - 4 * 16 * 7$$

$$D = 128$$

x oplossen:

$$\boldsymbol{x_{1,2}} = \frac{\mathbf{-24 \pm \sqrt{128}}}{\mathbf{2 * 16}}$$

$$\boldsymbol{x_{1,2}} = \frac{\mathbf{-24 \pm \sqrt{128}}}{\mathbf{32}}$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{-24 + \sqrt{128}}}{\mathbf{32}} \quad \boldsymbol{of} \quad \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{-24 - \sqrt{128}}}{\mathbf{32}}$$

$\sqrt{128}$ kun je ook schrijven als:

$$\mathbf{\sqrt{64 * 2}} =$$

$$\mathbf{\sqrt{64}} * \mathbf{\sqrt{2}} =$$

$$\mathbf{8} * \mathbf{\sqrt{2}}$$

Dit invullen geeft:

$$\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{-24 + 8 * \sqrt{2}}}{\mathbf{32}} \quad \boldsymbol{of} \quad \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{-24 - 8 * \sqrt{2}}}{\mathbf{32}}$$

Delen door 8:

$$\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{-3 + \sqrt{2}}}{\mathbf{4}} \quad \boldsymbol{of} \quad \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{-3 - \sqrt{2}}}{\mathbf{4}}$$

Vraag 13 (examenopgave 2017-I - vraag 16)
Gegeven is de volgende formule:

$$\log(p) = 5{,}68 - \frac{2120}{273 + T}$$

Om T vrij te maken moet je de volgende stappen gebruiken:

1. Zorg dat er geen breuken staan.
2. Zet alle variabelen die je wilt vrijmaken naar links en de rest naar rechts.
3. Haal de variabele die je wilt vrijmaken buiten haakjes.
4. Breng de rest naar rechts.

Dit toepassen op $\log(p) = 5{,}68 - \frac{2120}{273+T}$ geeft:

1. Zorg dat er geen breuken staan:

$$\log(p) * (273 + T) = 5{,}68(273 + T) - 2120$$

$$\log(p) * 273 + \log(p) * T = 5{,}68 * 273 + 5{,}68 * T - 2120$$

2. Zet alle variabelen die je wilt vrijmaken naar links en de rest naar rechts:

$$\log(p) * T - 5{,}68 * T = -2120 - \log(p) * 273 + 1550{,}64$$

3. Haal de variabele die je wilt vrijmaken buiten haakjes:

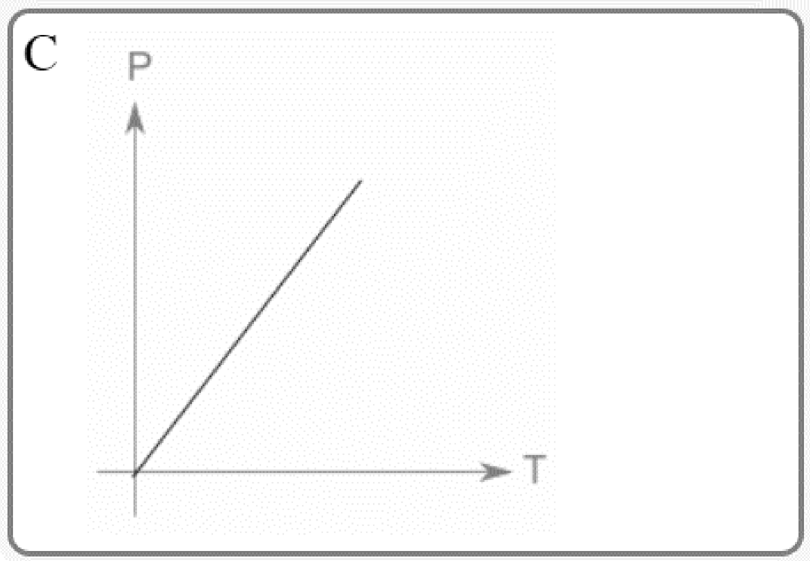
$$(\log(p) - 5{,}68) * T = -2120 - \log(p) * 273 + 1550{,}64$$

$$(\log(p) - 5{,}68) * T = -569{,}36 - \log(p) * 273$$

4. Breng de rest naar rechts:

$$T = \frac{-569{,}63 - \log(p) * 273}{\log(p) - 5{,}68}$$

Vraag 14
Het juiste antwoord is grafiek C:



Dit komt omdat de grafiek een rechte lijn door de oorsprong moet zijn voor een rechtevenredig verband. Daarom is C de enige grafiek die goed zou kunnen zijn.

Vraag 15
Gegeven:

$$t = 80 \quad als \quad n = 6$$

Wat is de waarde van n als $t = 16$?

Er is gegeven dat er een omgekeerd evenredig verband bestaat dus er geldt de formule:

$$t = \frac{a}{n}$$

Nu kun je de evenredigheidsconstante bereken door de gegeven waardes in te vullen:

$$t = \frac{a}{n} \rightarrow \quad 80 = \frac{a}{6}$$

Nu kun je a dus uitrekenen:

$$a = 80 * 6 = 480$$

Invullen in de formule geeft:

$$t = \frac{a}{n} = \frac{480}{n}$$

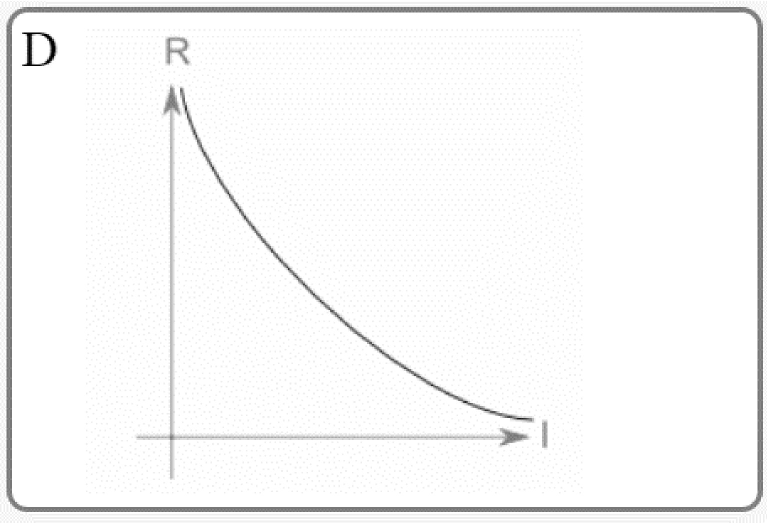
Om nu n te berekenen vul je de waarde van $t = 16$ in:

$$16 = \frac{a}{n} = \frac{480}{n}$$

$$n = \frac{480}{16} = 30$$

Oftewel, er zijn 30 bouwvakkers nodig om het huis in 16 dagen te bouwen.

Vraag 16
Het juiste antwoord is grafiek D:



Voor een omgekeerd evenredig verband moet een grafiek aantonen dat de ene variabele in dezelfde snelheid toeneemt terwijl de andere variabele afneemt. Dus antwoord D is het enige antwoord dat correct kan zijn.

Vraag 17
Gegeven:

$$y = versnelling$$

$$x = tijd$$

$$y = 10 \quad als \quad x = 2\,min = 120\,s$$

Wat is de waarde van y als $x = 120 + 5 = 125\,secondes$?

Vind eerst de evenredigheidsconstante a:

$$y = \frac{a}{x^2}$$

Dit kun je doen door de gegeven waardes in te vullen:

$$y = \frac{a}{x^2} \rightarrow \quad 10 = \frac{a}{120^2} = \frac{a}{14400}$$

Nu kun je a dus uitrekenen:

$$a = 10 * 14400 = 144000$$

Invullen in de formule geeft:

$$y = \frac{a}{x^2} = \frac{144000}{x^2}$$

Om nu y te berekenen vul je de waarde van $x = 125$ in:

$$y = \frac{a}{x^2} = \frac{144000}{125^2} = \frac{144000}{15625} = 9{,}2$$

Oftewel, de versnelling 5 seconde later is $9{,}2\,\frac{m}{s^2}$.

Uitwerkingen Domein B1

Vraag 1
Gegeven:

$$y = 5x + 4z + 3 - 7x + 4$$

$$z = x - 2$$

Schrijf eerst y vereenvoudigd op:

$$y = 5x + 4z + 3 - 7x + 4 = -2x + 4z + 7$$

Combineer de twee formules door z in te vullen in y. Zo verwijder je de hele variabele z:

$$y = -2x + 4(x - 2) + 7$$

De vergelijking uitschrijven geeft:

$$y = -2x + 4x - 8 + 7$$

$$y = 2x - 1$$

Nu kun je y schrijven als functie van alleen maar x:

$$y(x) = 2x - 1$$

Als je dan $y(2)$ wilt berekenen, vul je voor de x een 2 in en krijg je voor y één specifieke waarde:

$$y(2) = 2 * 2 - 1 = 3$$

Vraag 2
Gegeven:

$$4 * (x - 2) * 2 * x^4 = 4 * x^4$$

Als je een beetje dieper kijkt, kun je zien dat je de volgende algemene regel uit domein A kunt gebruiken:

$$A * B = A \quad \rightarrow \quad A = 0 \; of \; B = 1$$

Als we de vergelijking omschrijven naar dezelfde verhoudingen als de algemene regel krijg je namelijk:

$$4 * x^4 * 2 * (x - 2) = 4 * x^4$$

$$A * B = A$$

Waar

$$A = 4 * x^4 \quad \& \quad B = 2 * (x - 2)$$

$$A = 0 \quad of \quad B = 1$$

Dus:

$$4 * x^4 = 0 \quad of \quad 2 * (x - 2) = 1$$

$$x^4 = 0 \quad of \quad 2 * (x - 2) = 1$$

$$x = 0 \quad of \quad 2x - 4 = 0$$

$$x = 0 \quad of \quad x = 2$$

Vraag 3
Maak y vrij:

$$2y + 4x + 5z = 30$$

$$2y = -4x - 5z + 30$$

$$y = \frac{-4x - 5z + 30}{2}$$

Nu staat er nog een z, die we ook kunnen wegwerken mbv het tweede gegeven:

$$5z = x^2 - 2$$
$$z = \frac{x^2 - 2}{5}$$

Combineer de twee formules door z in te vullen in de formule van y. Zo verwijder je de hele variabele z:

$$y = \frac{-4x - 5(\frac{x^2 - 2}{5}) + 30}{2}$$

De vergelijking uitschrijven geeft:

$$y = \frac{-4x - x^2 + 2 + 30}{2}$$
$$y = \frac{-4x - x^2 + 32}{2}$$
$$y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 16$$

Nu kun je y dus schrijven als functie van alleen maar x:

$$y(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 16$$

Vraag 4
Gegeven:

$$N = 20\sqrt{5 - \frac{3z}{4}}$$
$$3z - 30 = -6t$$

We gaan eerst z vrij maken want dan kunnen we die variabele invullen in de andere formule.

$$3z - 30 = -6t$$
$$3z = 30 - 6t$$
$$z = 10 - 2t$$

z invullen in de formule van N geeft:

$$N = 20\sqrt{5 - \frac{3(10 - 2t)}{4}}$$
$$N = 20\sqrt{5 - \frac{30 - 6t}{4}}$$
$$N = 20\sqrt{5 - 7{,}5 + 1{,}5t}$$
$$N = 20\sqrt{-2{,}5 + 1{,}5t}$$

Vraag 5
Gegeven:

$$N = z^2 + 3z - 20$$
$$z^2 = 5 - 4t$$

We gaan eerst z vrij maken want dan kunnen we die variabele invullen in de andere formule.

$$z^2 = 5 - 4t$$

$$z = \sqrt{5 - 4t}$$

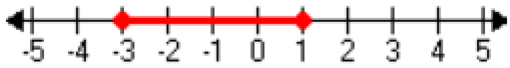
z invullen in N geeft:

$$N = 5 - 4t + 3\left(\sqrt{5 - 4t}\right) - 20$$

$$N = -4t + 3\left(\sqrt{5 - 4t}\right) - 15$$

Uitwerkingen Domein B2

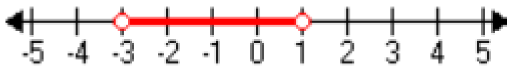
Vraag 1



De linker- en rechtergrens behoren wel tot het interval, dus het is een **gesloten** interval. Dit schrijf je op als volgt:

$$[-3,1]$$

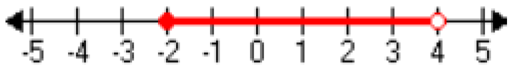
Vraag 2



De linker- en rechtergrens behoren niet tot het interval, dus het is een **open** interval. Dit schrijf je op als volgt:

$$\langle -3,1\rangle$$

Vraag 3



De linkergrens behoort wel tot het interval. De rechtergrens behoort niet tot het interval, dus het is een **halfopen** interval. Dit schrijf je op als volgt:

$$[-2,4\rangle$$

Vraag 4
Het differentiequotiënt is de gemiddelde verandering van y op een interval. Dit schrijf je ook wel op als:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

a. Vul $[0,2]$ in $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$:

$$f(0) = 0^3 - 3 * 0^2 + 6 = 6$$

$$f(2) = 2^3 - 3 * 2^2 + 6 = 2$$

Oftewel, het differentiequotiënt van y op $[0,2]$=

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-6}{2-0} = \frac{-4}{2} = -2$$

Het differentiequotiënt is negatief, wat klopt, aangezien de grafiek daalt in dit interval.

b. Vul $[-1,2]$ in $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 * (-1)^2 + 6 = 2$$

$$f(2) = 2^3 - 3 * 2^2 + 6 = 2$$

Oftewel, het differentiequotiënt van y op $[-1,2]$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-2}{2--1} = \frac{0}{3} = 0$$

Het differentiequotiënt is nul, wat klopt, aangezien de grafiek evenveel stijgt als daalt in dit interval.

Vraag 5
Vul $[0,2]$ in $f(x)$:

$$f(0) = 0{,}5 * 0^4 = 0$$
$$f(2) = 0{,}5 * 2^4 = 8$$

Oftewel, het differentiequotiënt van y op $[0,2]$=

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8-0}{2-0} = \frac{8}{2} = 4$$

Het differentiequotiënt is positief, wat klopt, aangezien de grafiek stijgt in dit interval.

Vraag 6
De helling van de grafiek van de functie $f(x) = x\,sin(x)$ in het punt $(2\pi, 0)$ is te benaderen door een differentie quotiënt met Δx = 0,001 te berekenen.

Het differentiequotiënt is de gemiddelde verandering van y op een interval. Dit schrijf je ook wel op als:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

We weten dat $y = 0$ op $x = 2\pi$. We gaan nu kijken wat y is als x $0{,}001$ toeneemt:

$$f(x + 0{,}001) = (x + 0{,}001)\sin(x + 0{,}001)$$

$$f(2\pi + 0{,}001) = (2\pi + 0{,}001)\sin(2\pi + 0{,}001)$$

$$f(2\pi + 0{,}001) = 0{,}00628418425 \ldots$$

$$\Delta y \approx 0{,}006284$$

De helling van de grafiek van f op punt $(2\pi, 0)$ is dan:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{0{,}006284}{0{,}001} \approx 6{,}28$$

Vraag 7
Gegeven:

$$y = 5x + 4z + 3 - 7x + 4$$

$$z = x - 2$$

Schrijf eerst y vereenvoudigd op:

$$y = 5x + 4z + 3 - 7x + 4 = -2x + 4z + 7$$

Combineer de twee formules door z in te vullen in y. Zo verwijder je de hele variabele z:

$$y = -2x + 4(x - 2) + 7$$

De vergelijking uitschrijven geeft:

$$y = -2x + 4x - 8 + 7$$

$$y = 2x - 1$$

Nu kun je y schrijven als functie van alleen maar x:

$$y(x) = 2x - 1$$

Als je dan $y(2)$ wilt berekenen, vul je voor de x een 2 in en krijg je voor y één specifieke waarde:

$$y(2) = 2 * 2 - 1 = 3$$

Vraag 8
Gegeven:

$$f(x) = 4 + \sqrt{2 - 4x}$$

Een wortel kun je alleen uitrekenen als alles onder een wortelteken moet positief is. Daarvoor:

$$2 - 4x \geq 0$$

$$-4x \geq -2$$

$$4x \leq 2$$

$$x \leq 0{,}5$$

Het domein van deze functie is dus:

$$\langle \leftarrow ; 0{,}5]$$

Het bereik bereken je nu door het domein in te vullen in de functie:

$$f(0{,}5) = 4 + \sqrt{2 - 4 * 0{,}5}$$

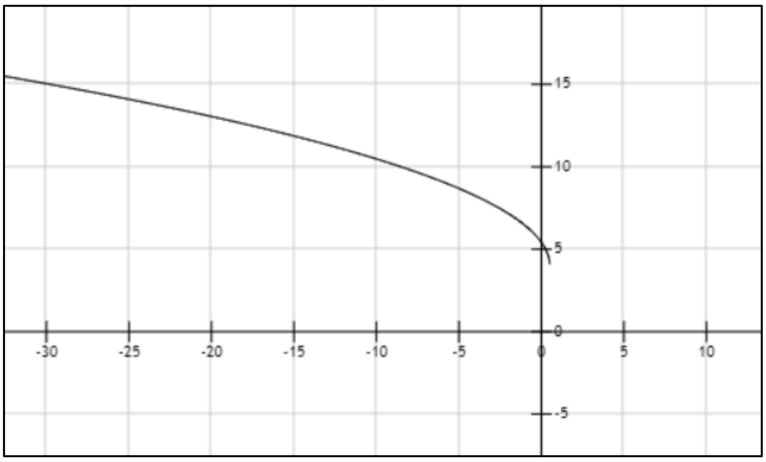
Het bereik is dus:

$$[4, \rightarrow\rangle$$

Ga maar na… hoe lager de x-waarde is die je invult (kleiner dan 0,5), hoe hoger de y-waarde wordt (vanaf 4).

Om het antwoord te controleren moet je een schets tekenen. Dit is verplicht bij ongelijkheden en altijd handig. Voer in:

$$Y_1 = \ 4 + \sqrt{2 - 4x}$$



Vraag 9

Optie 1:

Voor een kwadratische parabool geldt:

$$y = ax^2 + bx + c$$

De top van deze parabool is dan:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Als we hetzelfde doen bij de functie:

$$f(x) = x^2 + 3x + 4$$

$$a = 1$$

$$b = 3$$

$$c = 4$$

De x-coördinaat van de top wordt dan:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 * 1} = -1{,}5$$

Optie 2:

De top kun je ook bereken door de afgeleide gelijk te stellen aan nul:

$$f(x) = x^2 + 3x + 4$$

$$f'(x) = 2x + 3$$

$$f'(x) = 0$$

$$2x + 3 = 0$$

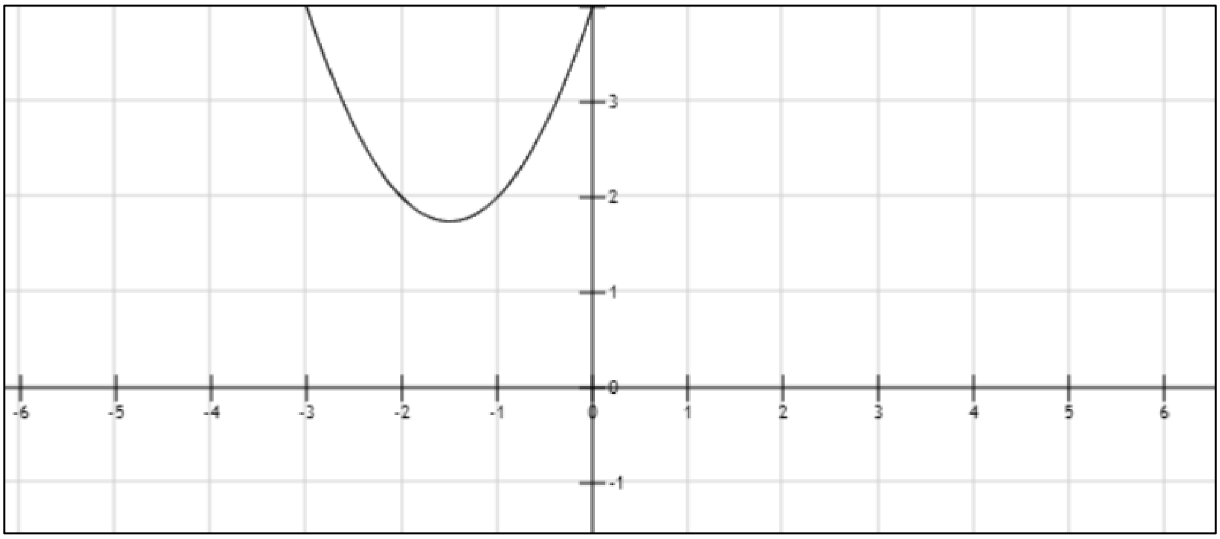
$$x = 1{,}5$$

$x = 1{,}5$ bij optie 1 en bij optie 2. Deze invullen in $f(x)$:

$$f(1{,}5) = (-1{,}5)^2 + 3 * -1{,}5 + 4 = 10{,}75$$

De top van de parabool bevindt zich dus op punt $\left(-\frac{3}{2}\ ;\ 10\frac{3}{4}\right)$

Dit klopt als je naar de grafiek kijkt:



Vraag 10
Gegeven is de volgende formule:

$$N = 4 * 1{,}6^t$$

Optie 1
Voor verdubbelingstijd geldt er dat $g^t = 2$
Dit geeft een groeifactor van $1{,}6$ in jaren:

$$1{,}6^t = 2$$

Oplossen geeft:

$$t = {}^2\log(1{,}6) = \frac{\log(2)}{\log(1{,}6)}$$

$t = 1{,}4747$ jaar
Dit is dus $1{,}47 * 12 = 17{,}70$ maanden

Optie 2
Voor verdubbelingstijd geldt er dat $g^t = 2$ (maanden)
Dit geeft een groeifactor van $1{,}6^{\frac{1}{12}}$ in maanden:

$$(1{,}6^{\frac{1}{12}})^t = 2$$

Oplossen geeft:

$$t = {}^2\log(1{,}6^{\frac{1}{12}}) = \frac{\log(2)}{\log(1{,}6^{\frac{1}{12}})}$$

$t = 17{,}70$ maanden

Vraag 11
Schrijf eerst de functie naar de algemene vorm $f(x) = a + b * \sin(c(x - d))$:

$$f(x) = 4 + 2 * \sin(4x + 2)$$

$$f(x) = 4 + 2 * \sin(2(x + 1))$$

Waarin:

$$a = evenwichtsstand = 4$$

$$b = amplitude = 2$$

$$c = 2$$

$$d = beginpunt = -1$$

De coördinaten van het beginpunt kun je vervolgens berekenen door $x = -1$ in te vullen in de formule:

$$f(-1) = 4 + 2 * \sin(4 * -1 + 2) = 4 + 2\sin(-2)$$

De coördinaten van het beginpunt zijn dus $(-1, 4 + 2\sin(-2))$.
De periode kan vervolgens berekend worden met de volgende formule:

$$c = \frac{2\pi}{periode} \quad \rightarrow$$

$$periode = \frac{2\pi}{c} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Vraag 12
Gegeven is de volgende functie:

$$|x^2 - 2| = 2$$

Als je de modulus strepen weghaalt, krijg je:

$$x^2 - 2 = 2 \quad of \quad x^2 - 2 = -2$$
$$x^2 = 4 \quad of \quad x^2 = 0$$
$$x = 2 \;\; of \;\; x = 0$$

Vraag 13
De bacterie verdubbelt zich in een maand dus de groeifactor per maand is:

$$g = 2$$

Gegeven: op $t = 0$ zijn er 700 bacteriën, dus $N = 700$
Deze gegevens vul je in de exponentiële formule in.

$$N = b * g^t$$
$$N = 700 * 2^t$$

Waar t is de tijd in maanden.

Vraag 14
Gegeven:

$$startwaarde = 1000$$
$$verdubbelingstijd\ t\ in\ uren = 3$$

Voor verdubbeling geldt:

$$g^t = 2$$
$$g^3 = 2$$
$$g = \sqrt[3]{2}$$

$\sqrt[3]{2}$ is hetzelfde als $2^{\frac{1}{3}}$. Je kunt dus beide gebruiken!

$$g = 1{,}2599 \ldots$$

Invullen in de formule geeft:

$$N = b * (1{,}2599 \ldots)^t$$
$$N = 1000 * (2^{\frac{1}{3}})^t$$

Voor het tweede deel van de vraag gebruik je het gegeven:
2 dagen = 48 uur, dus $t = 48$ invullen in de formule geeft:

$$N = 1000 * (2^{\frac{1}{3}})^{48} = 65\,536\,000\ bacteriën$$

Uitwerkingen Domein B3

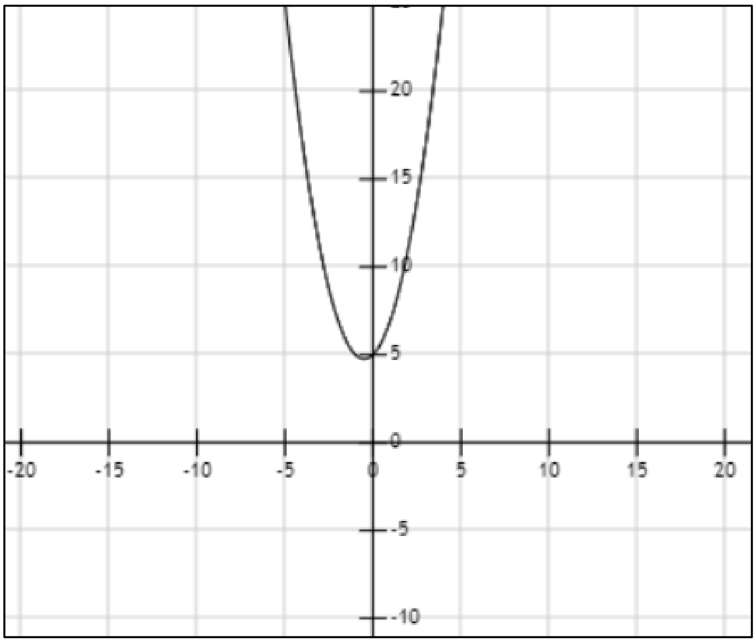
Vraag 1

Na een vermenigvuldiging met de y −as vermenigvuldig je x overal met $\frac{1}{2}$. Je vervangt de x dus met $(\frac{1}{2}x)$:

$$f(x) = 4x^2 + 2x + 5$$

Vermenigvuldiging met de y-as:

$$f(x) = 4(\frac{1}{2}x)^2 + 2\left(\frac{1}{2}x\right) + 5 = x^2 + x + 5$$



Zoals je kunt zien wordt hier de afstand tot de y-as 2 keer zo groot.

Vraag 2

Dit is dus een horizontale translatie naar links. De functie $f(x)$ verandert dus naar:

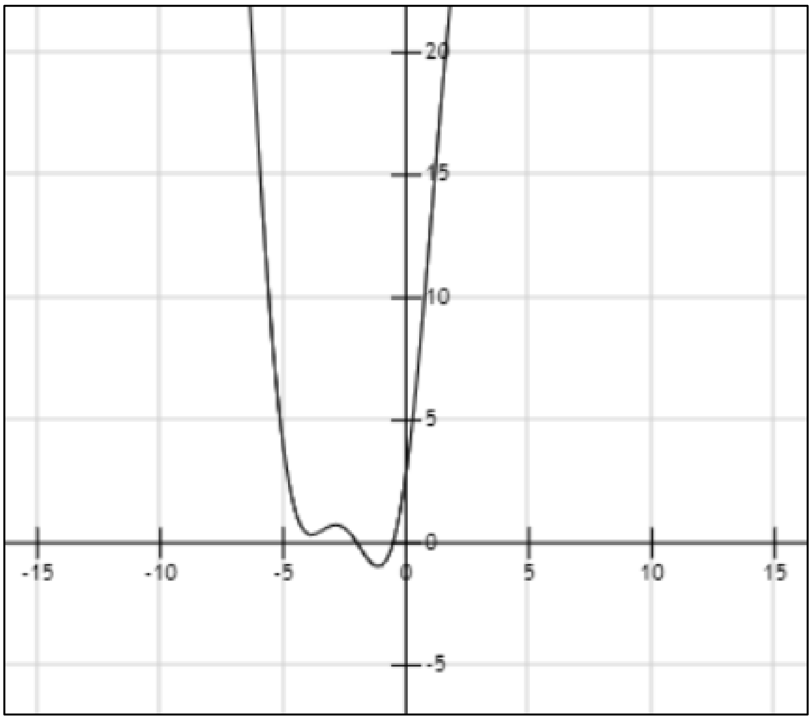
$$f(x) \to f(x+2)$$

Je vervangt x dus door $(x+2)$. Dit invullen in de formule geeft:

$$f(x) = (x+2)^2 + 2(x+2) * \sin(x+2+4)$$

$$f(x) = (x+2)^2 + (2x+4) * \sin(x+6)$$

Kijken of dit klopt door de grafiek te plotten:



Je ziet dat de grafiek 2 naar links is geschoven. Dus het klopt.

Vraag 3
De grafiek van $f(x) = x\sqrt{x+18}$ wordt 18 naar rechts verschoven. Zo ontstaat de grafiek van g met: $g(x) = x\sqrt{x} - 18\sqrt{x}$.

Er is dus een horizontale translatie van 18 naar rechts. De formule hiervoor is:

$$f(x-18)$$

Dit invullen in de formule van $f(x)$ geeft:

$$f(x-18) = (x-18)\sqrt{(x-18)+18}$$

$$f(x-18) = (x-18)\sqrt{x}$$

$$f(x-18) = x\sqrt{x} - 18\sqrt{x}$$

Aangezien $g(x) = f(x-18)$, klopt dit.

Vraag 4
Gegeven is een functie:

$$f(x) = \frac{-6}{2x-3} + 2$$

1. Een vermenigvuldiging met factor 2 t.o.v. de x-as:
Bij een vermenigvuldiging met factor 2 t.o.v de x-as, krijg je $2 * f(x)$:

$$2 * \left(\frac{-6}{2x-3} + 2\right) =$$

$$\frac{-12}{2x-3} + 4$$

2. Translatie van $(-2, 8)$:

Er is dus een horizontale translatie van -2 naar rechts (dit is hetzelfde als 2 naar links) en een verticale translatie van 8 omhoog. De formule hiervoor is:

$$f(x-a)+b=f(x--2)+8=f(x+2)+8$$

Dit invullen in de bovenstaande formule ($\frac{-12}{2x-3}+4$) geeft:

$$\frac{-12}{2(x+2)-3}+4+8=$$

$$\frac{-12}{2x+1}+12$$

De grafiek van g gaat door de oorsprong als x en y tegelijk nul zijn. Controleren door $x=0$ in te vullen:

$$g(x)=\frac{-12}{2x+1}+12$$

$$g(0)=\frac{-12}{2*0+1}+12$$

$$g(0)=0$$

Uitwerkingen Domein B4

Vraag 1

Stappen	$\boldsymbol{f(x)=\frac{x}{6}}$
1. Schrijf $f(x)$ op als y als dit nog niet gedaan is.	$y=\frac{x}{6}$
2. Verwissel de variabelen.	$x=\frac{y}{6}$
3. Maak y vrij.	$y=6x$
4. Vervang y door $f^{inv}(x)$.	$f^{inv}(x)=\ 6x$
5. Controleer je formule door een random getal in te vullen. Het getal dat hieruit komt moet hetzelfde zijn bij $f(x)$ en bij $f^{inv}(x)$.	Stel: $x=2$ $f(2)=\frac{x}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ Deze uitkomst invullen in $f^{inv}(x)$ geeft: $f^{inv}\left(\frac{1}{3}\right)=\ 6x=6*\frac{1}{3}=2$ Dit klopt dus.

Dus:

$$f^{inv}(x)=\ 6x$$

Vraag 2

Stappen	$\boldsymbol{f(x)=\frac{x-1}{6x+3}}$
1. Schrijf $f(x)$ op als y als dit nog niet gedaan is.	$y=\frac{x-1}{6x+3}$
2. Verwissel de variabelen.	$x=\frac{y-1}{6y+3}$
3. Maak y vrij.	$x(6y+3)=y-1$

	$6xy + 3x = y - 1$ $6xy - y = -3x - 1$ $(6x - 1)y = -3x - 1$ $y = \frac{-3x - 1}{6x - 1}$
4. Vervang y door $f^{inv}(x)$.	$f^{inv}(x) = \frac{-3x - 1}{6x - 1}$
5. Controleer je formule door een random getal in te vullen. Het getal dat hieruit komt moet hetzelfde zijn bij $f(x)$ en bij $f^{inv}(x)$.	Stel: $x = 2$ $f(2) = \frac{2 - 1}{6 * 2 + 3} = \frac{1}{15}$ geeft: $f^{inv}\left(\frac{1}{15}\right) = \frac{-3 * \frac{1}{15} - 1}{6 * \frac{1}{15} - 1}$ $= \frac{-\frac{1}{5} - 1}{\frac{2}{5} - 1} = \frac{-\frac{6}{5}}{\frac{3}{5}} = 2$ Dit klopt dus.

Dus:

$$f^{inv}(x) = \frac{-3x - 1}{6x - 1}$$

Vraag 3

Stappen	$\boldsymbol{f(x) = 5 - \frac{6}{x + 2}}$
1. Schrijf $f(x)$ op als y als dit nog niet gedaan is.	$y = 5 - \frac{\mathbf{6}}{\boldsymbol{x + 2}}$
2. Verwissel de variabelen.	$x = 5 - \frac{\mathbf{6}}{\boldsymbol{y + 2}}$
3. Maak y vrij.	$x - 5 = \frac{\mathbf{-6}}{\boldsymbol{y + 2}}$ $(x - 5)(y + 2) = -6$ $xy + 2x - 5y - 10 = -6$ $xy - 5y = -2x + 4$ $(x - 5)y = -2x + 4$ $y = \frac{-2x + 4}{x - 5}$
4. Vervang y door $f^{inv}(x)$.	$f^{inv}(x) = \frac{-2x + 4}{x - 5}$
5. Controleer je formule door een random getal in te vullen. Het getal dat hieruit komt moet hetzelfde zijn bij $f(x)$ en bij $f^{inv}(x)$.	Stel: $x = 1$ $f(1) = 5 - \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{1 + 2}} = 3$ Deze uitkomst invullen in $f^{inv}(x)$ geeft:

	$f^{inv}(3) = \frac{-2 * 3 + 4}{3 - 5} = 1$ Dit klopt dus.

Dus:

$$f^{inv}(x) = \frac{-2x + 4}{x - 5}$$

Vraag 4

Stappen	$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x - 1}}$
1. Schrijf $f(x)$ op als y als dit nog niet gedaan is.	$y = \sqrt{x - 1}$
2. Verwissel de variabelen.	$x = \sqrt{y - 1}$
3. Maak y vrij.	$x^2 = y - 1$ $y = x^2 + 1$
4. Vervang y door $f^{inv}(x)$.	$f^{inv}(x) = x^2 + 1$
5. Controleer je formule door een random getal in te vullen. Het getal dat hieruit komt moet hetzelfde zijn bij $f(x)$ en bij $f^{inv}(x)$.	Stel: $x = 2$ $f(2) = \sqrt{2 - 1} = 1$ Deze uitkomst invullen in $f^{inv}(x)$ geeft: $f^{inv}(1) = 1^2 + 1 = 2$ Dit klopt dus.

Dus:

$$f^{inv}(x) = x^2 + 1$$

Vraag 5

Stappen	$\boldsymbol{f(x) = 2^x}$
1. Schrijf $f(x)$ op als y als dit nog niet gedaan is.	$y = 2^x$
2. Verwissel de variabelen.	$x = 2^y$
3. Maak y vrij.	$y = {}^2\log(x)$
4. Vervang y door $f^{inv}(x)$.	$f^{inv}(x) = {}^2\log(x)$
5. Controleer je formule door een random getal in te vullen. Het getal dat hieruit komt moet hetzelfde zijn bij $f(x)$ en bij $f^{inv}(x)$.	Stel: $x = 1$ $f(1) = 2^1 = 2$ Deze uitkomst invullen in $f^{inv}(x)$ geeft: $f^{inv}(2) = {}^2\log(2) = 1$ Dit klopt dus.

Uitwerkingen Domein B5

Vraag 1
Gegeven:

$$f(x) = x^2 + 3x - 40$$

Product	Som
$\mathbf{1 \,\&\, -40}$	-39
$\mathbf{-1 \,\&\, 40}$	39
$\mathbf{2 \,\&\, -20}$	-18
$\mathbf{-2 \,\&\, 20}$	18
$\mathbf{4 \,\&\, -10}$	-6
$\mathbf{-4 \,\&\, 10}$	6
$\mathbf{5 \,\&\, -8}$	-3
$\mathbf{-5 \,\&\, 8}$	3

Oftewel:

$$x^2 + 3x - 40 = 0$$

$$(x - 5)(x + 8) = 0$$

$$x - 5 = 0 \quad of \quad x + 8 = 0$$

$$x = 5 \quad of \quad x = -8$$

Vraag 2
Gegeven:

$$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$$

Substitueer (zie domein A1 voor meer uitleg over substitueren) de vergelijking eerst met $p = x^2$:

$$p^2 - 5p + 6 = 0$$

Ontbind de vergelijking nu in factoren:

Product	Som
$\mathbf{2 \,\&\, 3}$	$\mathbf{5}$
$\mathbf{-2 \,\&\, -3}$	$\mathbf{-5}$
$\mathbf{6 \,\&\, 1}$	7
$\mathbf{-6 \,\&\, -1}$	$\mathbf{-7}$

$$(p - 2)(p - 3) = 0$$

Bereken p:

$$p = 2 \quad of \quad p = 3$$

Zet p weer om naar x:

$$x^2 = 2 \quad of \quad x^2 = 3$$

Bepaal x:

$$x^2 = 2 \rightarrow \; x = \sqrt{2} \; of \; x = -\sqrt{2} \quad \rightarrow Voldoet$$

$$x^2 = 3 \rightarrow \; x = \sqrt{3} \; of \; x = -\sqrt{3} \quad \rightarrow Voldoet$$

Vraag 3

Stel eerst de vergelijkingen $f(x)$ en $g(x)$ aan elkaar gelijk en bereken x:

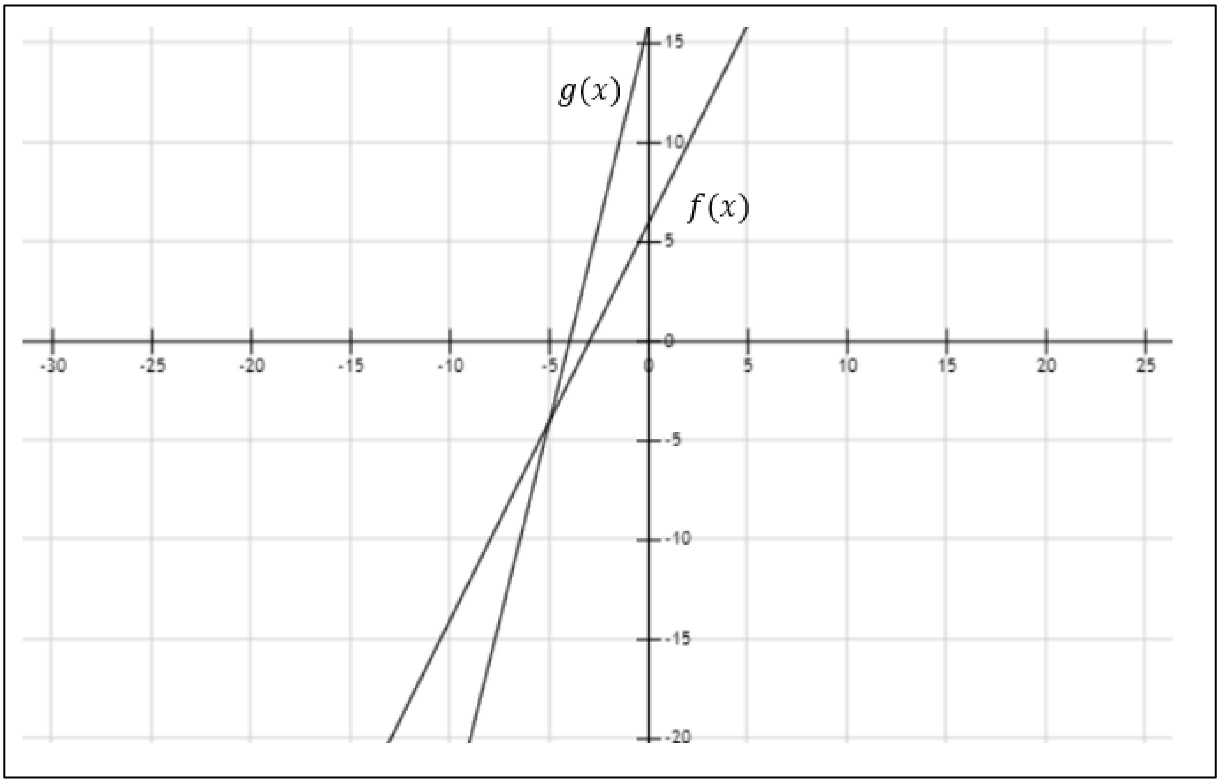
$$f(x) = g(x)$$

$$2x + 6 = 4x + 16$$

$$-2x = 10$$

$$x = -5$$

$x = -5$ is dus het snijpunt. Het is nu de vraag welke grafiek nou boven de ander uitkomt. Je gaat dit nu testen door een grafiek van de twee formules te maken in je GR en vervolgens een schets te tekenen.



Of, je vult een hogere x in, in de formules:

$$x = -3 \rightarrow$$

$$f(-3) = 2 * -3 + 6 = 0, \quad g(-3) = 4 * -3 + 16 = 4$$

Hierin zie je dat $f(x) \leq g(x)$ geldt en dat dus geldt $x \geq -5$.

Dit kun je controleren door een random getal kleiner dan -5 in te vullen:

$$x = -10 \rightarrow \quad f(-10) = 2 * -10 + 6 = -14, \quad g(-10) = 4 * -10 + 16 = -24$$

Hierin zie je dat $f(x) \leq g(x)$ niet geldt.
Oftewel $f(x) \leq g(x)$ als $x \geq -5$

Vraag 4
Stel eerst $f(x)\ en\ g(x)$ gelijk aan elkaar:

$$f(x) = g(x)$$

$$-x + \frac{1}{2} = \sqrt{-3x + 8\frac{1}{4}}$$

$$\left(-x + \frac{1}{2}\right)^2 = -3x + 8\frac{1}{4}$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = -3x + 8\frac{1}{4}$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

Ontbinden in factoren:

$$(x-2)(x+4) = 0$$

$$x = 2 \quad of \quad x = -4$$

Invullen om te controleren of het klopt:

$x = 2 \rightarrow$ $\quad -2 + \frac{1}{2} = \sqrt{-3 * 2 + 8\frac{1}{4}}$

$-1{,}5 = \sqrt{2\frac{1}{4}}$ KLOPT

$x = -4 \rightarrow$ $\quad 4 + \frac{1}{2} = \sqrt{-3 * -4 + 8\frac{1}{4}}$

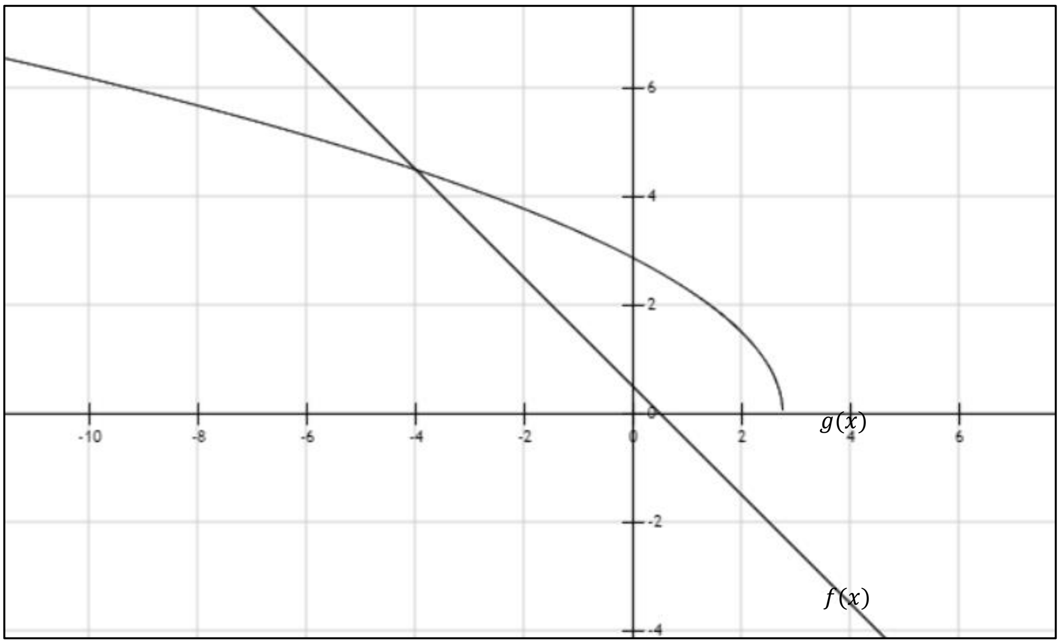
$4\frac{1}{2} = \sqrt{20\frac{1}{4}}$ KLOPT

Als je de functies op je GR invult met:

$$Y_1 = -x + \frac{1}{2}$$

$$Y_2 = \sqrt{-3x + 8\frac{1}{4}}$$

Zie je dat dit alleen maar geldig is voor $x < -4$:



Dus $f(x) > g(x)$ als $x < -4$.

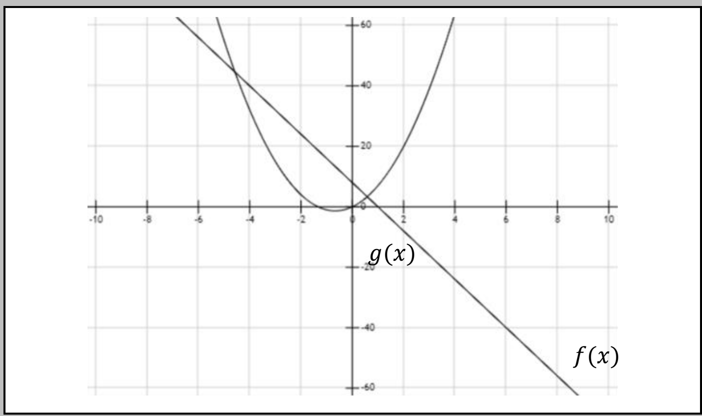
Vraag 5
PLOT

$$y_1 = 3x^2 + 4x$$

$$y_2 = -8x + 8$$

WINDOW $[-10,10]$ x $[-60,60]$
CALC intersect geeft $x \approx -4{,}582,\ \ x \approx 0{,}582$
Conclusie: $-4{,}582 \leq x \leq 0{,}582$

$\mathrm{Y}_2 = -8\mathrm{x} + 8$



Vraag 6
De functie f is gegeven door:

$$f(x) \ = {}^{3}\log\,(4x \ + \ 3)$$

De coördinaten van de snijpunten met de x-as -> $y = 0$

$$f(x) = {}^{3}\log\,(4x \ + \ 3) = 0$$

$$4x + 3 = 3^0$$

$$4x + 3 = 1$$

$$4x = -2$$

$$x = -\frac{2}{4}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

De coördinaten van de snijpunten met de y-as -> $x = 0$

$$f(0) = \ {}^{3}\log\,(4 * 0 \ + \ 3)$$

$$= \ {}^{3}\log\,(\,3)$$

$$= \frac{\log(3)}{\log(3)}$$

$$= 1$$

Dus de coördinaten van de snijpunten met de x-as en de y-as zijn:

$$\left(-\frac{1}{2},0\right) \quad en \quad (0,1)$$

Vraag 7
Om de snijpunten te berekenen moet je de functies f en g aan elkaar gelijkstellen:

$$f(x) = g(x)$$

$$(x+2)\sqrt{x+2} = x(x+2)$$

$$\sqrt{x+2} = x$$

$$x+2 = x^2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$x = 2 \rightarrow klopt \qquad of \qquad x = -1 \rightarrow klopt\ niet$$

$x = 2$ invullen in één van de functies geeft:

$$f(2) = (2+2)\sqrt{2+2} = 8$$

De coördinaten van het snijpunt zijn dus:

$$(2{,}8)$$

Uitwerkingen Domein B6

Vraag 1

Stappenplan	$\frac{\mathbf{3x^2+x-2}}{\mathbf{x+6}}$
1. Zet de noemer in de teller en compenseer.	noemer = $x+6$ teller = $3x^2+x-2$ noemer in de teller zetten: $\frac{3x(x+6)-18x+x-2}{x+6}$
	De term $-18x$ is nodig om $3x(x+6) = 3x^2+18x$ te compenseren. Er moet namelijk alleen maar $3x^2$ staan.
2. Haal de grootste term eruit. Dit is de term met het hoogste kwadraat x.	$\frac{3x(x+6)-18x+x-2}{x+6} =$ $\frac{3x(x+6)}{x+6} + \frac{-18x+x-2}{x+6} =$ $3x + \frac{-18x+x-2}{x+6} =$ $3x + \frac{-17x-2}{x+6} =$
	$\frac{-17x-2}{x+6} =$

3. Herhaal de truc: Zet de noemer in de teller en compenseer.	noemer = $x + 6$ teller = $-17x - 2$ noemer in de teller zetten: $\frac{-17(x+6)+102-2}{x+6} =$
	De term +102 is nodig om$-17(x+6) = -17x - 102$ te compenseren. Er moet namelijk alleen maar $-17x$ staan.
4. Haal de grootste term eruit. Dit is de term met het hoogste kwadraat x.	$3x + \frac{-17(x+6)+102-2}{x+6} =$
	$3x + \frac{-17(x+6)}{x+6} + \frac{100}{x+6} =$ $3x - 17 + \frac{100}{x+6}$

Nu kunnen we dus de hele functie schrijven als:

$$f(x) = 3x - 17 + \frac{100}{x+6}$$

We weten dat $\lim_{x \to \infty} \frac{100}{x+6} = 0$. Omdat als je $x \to \infty$ invult je het volgende krijgt:

$$\frac{100}{\infty + 6} \approx 0$$

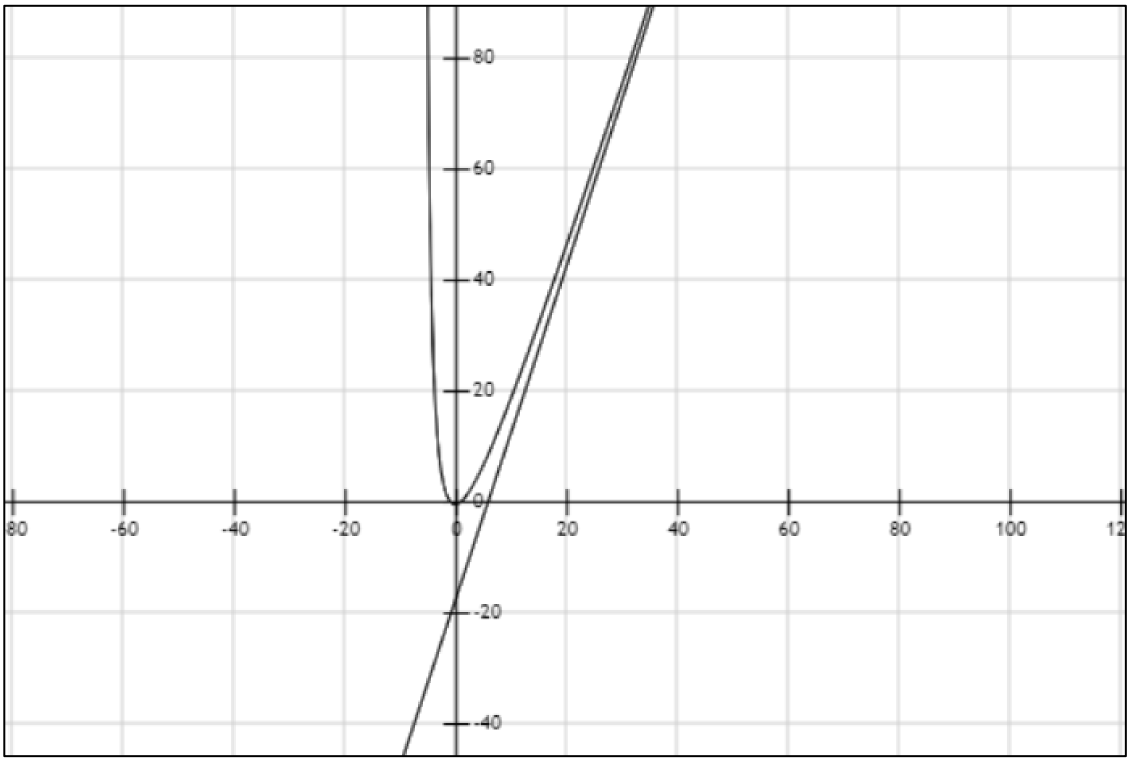
Je kunt hier in plaats van oneindig ook een heel groot getal invullen. Als je bijvoorbeeld 100.000 invult, zul je zien dat het antwoord bijna hetzelfde zal zijn:

$$\frac{100}{100.000 + 6} \approx 0$$

Hier blijft dus een lineaire functie over:

$$3x - 17$$

De functie $f(x) = \frac{3x^2+x-2}{x+6}$ heeft dus een scheve asymptoot $3x - 17$ omdat $f(x)$ na verloop van tijd gaat lijken op een lineaire functie:



Vraag 2
Deze kun je berekenen door de noemer nul te maken (de teller mag niet gelijk zijn aan nul):

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x + 4)(x - 2) = 0$$

$$x = -4 \;\; of \;\; x = 2$$

Het domein is dus alle x-waarden behalve $x = -4 \; en \; x = 2$, en de twee verticale asymptoten zijn:

$$x = -4 \quad en \;\; x = 2$$

Domein: $x \neq -4, x \neq 2$
Verticale asymptoot: $x = -4, x = \; 2$

Vraag 3
De horizontale asymptoot kun je vinden door een hele grote waarde van x in te vullen. Zoals je kunt zien kun je alle kleine waardes dan verwaarlozen en blijft de volgende formule over:

$$y = \frac{2x^2 - 11}{x^2 + 9} = \frac{2 * 100000^2 - 11}{100000^2 + 9} \approx \frac{2 * 100000^2}{100000^2} \approx 2$$

De horizontale asymptoot is dus op $y = 2$.

Vraag 4
De functie van f is gegeven door:

$$f(x) = {}^2\log{(x^2 - x)}$$

Zoals je kunt zien in de grafiek willen we de verticale asymptoot berekenen. Bij logaritmische functies is dit de x –waarde waarbij de uitdrukking tussen de haakjes gelijk is aan nul.

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

$$x = 0 \quad of \quad x = 1$$

Dus de ene asymptoot heeft vergelijking $x = 0$ en de andere asymptoot heeft vergelijking $x = 1$.

Vraag 5
Gegeven:

$$f(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x - 2}$$

De verticale asymptoot kun je berekenen door de noemer nul te maken (de teller mag niet gelijk zijn aan nul):

$$e^x - 2 = 0$$

$$e^x = 2$$

$$x = \ln(2)$$

De verticale asymptoot is dus $x = \ln(2)$.

De horizontale asymptoot kun je vinden door een hele grote waarde van x in te vullen. Zoals je kunt zien kun je alle kleine waardes dan verwaarlozen en blijft de volgende formule over:

$$y = \frac{2e^x + 1}{e^x - 2} = \frac{2e^{1000000}}{e^{1000000}} \approx 2$$

De horizontale asymptoot is dus op $y = 2$.

Vraag 6
Gegeven:

$$f(x) = \frac{\ln(x) - 1}{2\ln(x) - 3}$$

De verticale asymptoot kun je berekenen door de noemer nul te maken (de teller mag niet gelijk zijn aan nul):

$$2\ln(x) - 3 = 0$$

$$\ln(x) = 1{,}5$$

$$x = \mathrm{e}^{1,5}$$

De verticale asymptoot is dus $x = \mathrm{e}^{1,5}$.

De horizontale asymptoot kun je vinden door een hele grote waarde van x in te vullen. Zoals je kunt zien kun je alle kleine waardes dan verwaarlozen en blijft de volgende formule over:

$$y = \frac{\ln(1000000) - 1}{2\ln(1000000) - 3} = \frac{\ln(1000000)}{2\ln(1000000)} \approx \frac{1}{2}$$

De horizontale asymptoot is dus op $y = 1/2$.

Vraag 7
Gegeven:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - 2x}$$

Voor perforatie geldt: teller = 0 en noemer = 0. Door de noemer gelijk te stellen aan nul krijg je:

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \quad of \quad x = 2$$

Nu zou je dus denken dat daar een verticale asymptoot zit.

Maar als je $x = 0$ invult in de formule krijg je $f(x) = \frac{0^3+3*0^2+2*0}{0^2-2*0} = \frac{0}{0}$.

Dit is dus een perforatie en het is dus nodig om de formule te herschrijven om de coördinaten van de perforatie te vinden. Dit doen we door middel van de limiet uit te rekenen van de functie als x nadert naar de x van de perforatie:

$$\lim_{x\to 0}(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - 2x} = \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 2} = \frac{(x+2)(x+1)}{x-2}$$

Als we nu $x = 0$ invullen in bovenstaande formule krijgen we:

$$\lim_{x\to 0}(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{x-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

Dus er is een perforatie op $(0, -1)$.

Voor $x = 2$:

$$f(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{x-2} = \frac{12}{0}$$

De teller is hier niet gelijk aan nul, dus er is geen perforatie.

Vraag 7
Gegeven:

$$f(x) = \frac{(2x^2 - 11x + 15)}{(2x + a)}$$

Voor perforatie geldt: teller = 0 en noemer = 0. Door de noemer gelijk te stellen aan nul krijg je:

$$2x + a = 0$$

Door de teller gelijk te stellen aan nul krijg je:

$$2x^2 - 11x + 15 = 0$$

$$x = 2{,}5 \quad of \quad x = 3$$

Stappenplan	$\mathbf{\frac{(2x^2 - 11x + 15)}{(2x + a)}}$
1. Zet de noemer in de teller en compenseer.	Noemer = $2x + a$ Teller = $2x^2 - 11x + 15$ Noemer in de teller zetten:

	$\dfrac{2x(2x+a)-18x+x-2}{x+6}$
	De term $-18x$ is nodig om $3x(x+6)=3x^2+18x$ te compenseren. Er moet namelijk alleen maar $3x^2$ staan.
2. Haal de grootste term eruit. Dit is de term met het hoogste kwadraat x.	$\dfrac{3x(x+6)-18x+x-2}{x+6}=$ $\dfrac{3x(x+6)}{x+6}+\dfrac{-18x+x-2}{x+6}=$ $3x+\dfrac{-18x+x-2}{x+6}=$ $3x+\dfrac{-17x-2}{x+6}=$
	$\dfrac{-17x-2}{x+6}=$
3. Herhaal de truc: Zet de noemer in de teller en compenseer.	Noemer = $x+6$ Teller = $-17x-2$ Noemer in de teller zetten: $\dfrac{-17(x+6)+102-2}{x+6}=$
	De term +102 is nodig om$-17(x+6)=-17x-102$ te compenseren. Er moet namelijk alleen maar $-17x$ staan.
4. Haal de grootste term eruit. Dit is de term met het hoogste kwadraat x.	$3x+\dfrac{-17(x+6)+102-2}{x+6}=$
	$3x+\dfrac{-17(x+6)}{x+6}+\dfrac{100}{x+6}=$ $3x-17+\dfrac{100}{x+6}$

Uitwerkingen Domein B

Vraag 1 (examenopgave 2015-II - vraag 4)

De functies f en y snijden elkaar in punt A. Als je ze dus aan elkaar gelijkstelt, kom je aan de x-coördinaat van punt A:

$$f(x)=y$$

$$\left(x-\sqrt{x}\right)^2=x$$

Hieruit volgt dus:

$$x-\sqrt{x}=\sqrt{x} \quad of \quad x-\sqrt{x}=-\sqrt{x}$$

Beide oplossingen verder uitwerken geeft:

$$x=2\sqrt{x} \quad of \quad x=0$$

$$x^2=4x \quad of \quad x=0$$

$$x^2-4x=0 \quad of \quad x=0$$

$$x(x-4)=0 \quad of \quad x=0$$

$$x = 0 \quad of \quad x = 4 \quad of \quad x = 0$$

We weten dat $x = 0$ het snijpunt in de oorsprong is. Dus de x-coördinaat in punt A is:

$$x = 4$$

Vraag 2 (examenopgave 2010-I - vraag 13)
De functies f en g zijn gegeven door:

$$f(x) = 2^{4x+1}$$

$$g(x) = 4 * 4^x$$

Voor een snijpunt geldt:

$$f(x) = g(x)$$

$$2^{4x+1} = 4 * 4^x$$

Je ziet dat er links een macht staat met grondtal 2 en rechts staat er een macht met grondtal 4.
Je moet proberen of je links en rechts hetzelfde grondtal kunt krijgen.

Je kunt g ook wel schrijven als:

$$4 * 4^x = 4^1 * 4^x = 4^{1+x} = 2^{2(1+x)} = 2^{2+2x}$$

Stel f en g aan elkaar gelijk:

$$f(x) = g(x)$$

$$2^{4x+1} = 2^{2+2x}$$

Zoals je ziet, is aan beide kanten van het = teken hetzelfde grondtal. Deze kun je dus weglaten.

$$4x + 1 = 2 + 2x$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Door de x-coördinaat in te vullen in één van de functies bereken je de y −coördinaat:

$x = \frac{1}{2}$ invullen in $f(x) = 2^{4x+1}$ geeft:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{4*\frac{1}{2}+1} = 8$$

De coördinaten van het snijpunt zijn dus:

$$(\frac{1}{2}, 8)$$

Vraag 3 (examenopgave 2014-I - vraag 5)
Stel f en y aan elkaar gelijk:

$$f(x) = y$$

$$\frac{60}{x^4 + 4} = 2$$

Maak eerst aan weerszijden een breuk en dan kruislings vermenigvuldigen:

$$\frac{60}{x^4 + 4} = \frac{2}{1}$$

$$2(x^4 + 4) = 60$$

$$(x^4 + 4) = 30$$

$$x^4 = 26$$

De oplossingen hiervan zijn:

$$x = \sqrt[4]{26} \quad of \quad x = -\sqrt[4]{26}$$

Dus de coördinaten van de snijpunten zijn:

$$\left(\sqrt[4]{26}, 2\right) \quad en \quad \left(-\sqrt[4]{26}, 2\right)$$

Vraag 4 (examenopgave 2012-I - vraag 10)
De lijn en de grafiek snijden elkaar niet als $f(x) = y$ geen oplossingen heeft.

De vergelijking heeft dus nul oplossingen.

Oplossen geeft:

$$f(x) = y$$

$$\sqrt{4x - 12} = 2x - 5$$

Kwadrateren:

$$4x - 12 = (2x - 5)^2$$

$$4x - 12 = 4x^2 - 20x + 25$$

Herleiden geeft:

$$4x^2 - 24x + 37 = 0$$

De discrimant, D is:

$$D = b^2 - 4ac = (-24)^2 - 4 * 4 * 37 = -16$$

Omdat de discriminant $D < 0$, heeft de vergelijking geen oplossingen. Oftewel, de grafiek van f en de lijn snijden elkaar niet.

Vraag 5 (examenopgave 2012-I - vraag 12)
De functie f is gegeven door:

$$f(x) = \sqrt{4x - 12}$$

Dit kun je ook schrijven als:

$$f(x) = \sqrt{4(x - 3)}$$

Dus de transformatie kan zijn:
1. vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met ¼:

2. de translatie van (3,0)

$$f(x) = \sqrt{4(x - 3)}$$

De transformatie kan ook zijn:
1. de translatie van (12,0)

2. vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met ¼:

De functie f is gegeven kun je ook schrijven als:

$$f(x) = \sqrt{4(x - 3)} = 2\sqrt{(x - 3)}$$

De transformatie kan dus ook zijn:
1. de translatie van (3,0)
2. vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met 2

Vraag 6

Bereken algebraïsch:

$$f(x) \geq g(x)$$
$$^3\log(x+2) \geq 1 + {}^3\log(2x-11)$$

$f(x)$ en $g(x)$ aan elkaar gelijkstellen:

$$^3\log(x+2) = 1 + {}^3\log(2x-11)$$
$$^3\log(x+2) = {}^3\log(3) + {}^3\log(2x-11)$$

De regel $^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$ toepassen:

$$^3\log(x+2) = {}^3\log(3(2x-11))$$
$$^3\log(x+2) = {}^3\log(6x-33)$$
$$^3\log(x+2) - {}^3\log(6x-33) = 0$$

De regel $^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$ toepassen:

$$^3\log\left(\frac{x+2}{6x-33}\right) = 0$$
$$\frac{x+2}{6x-33} = 3^0$$
$$\frac{x+2}{6x-33} = 1$$
$$x+2 = 6x-33$$
$$-5x = -35$$
$$x = 7$$

Voor $f(x) \geq g(x)$,

$$x \leq 7$$

Want $x = 6$ geeft:

$$f(x) = {}^3\log(6+2) = 1{,}89$$
$$g(x) = 1 + {}^3\log(2 * 6 - 11) = 1$$

$x = 8$ geeft:

$$f(x) = {}^3\log(8+2) = 2{,}10$$
$$g(x) = 1 + {}^3\log(2 * 8 - 11) = 2{,}46$$

Vraag 7 (examenopgave 2018 I – vraag 12)
Gebruik gewoon weer het stappenplan voor inverse functies!

Stappen	$\boldsymbol{f(x) = \ln(\sqrt{x})}$
1. Schrijf $f(x)$ op als y als dit nog niet gedaan is.	$y = \ln(\sqrt{x})$

2. Verwissel de variabelen.	$x = \ln\left(\sqrt{y}\right)$
3. Maak y vrij.	$e^x = e^{\ln(\sqrt{y})}$ $e^x = \sqrt{y}$ $e^{2x} = y$
4. Vervang y door $f^{inv}(x)$.	$f^{inv}(x) = e^{2x}$
5. Controleer je formule door een random getal in te vullen. Het getal dat hieruit komt moet hetzelfde zijn bij $f(x)$ en bij $f^{inv}(x)$.	Stel: $x = 1$ $f(0) = \ln\left(\sqrt{1}\right) = 0$ Deze uitkomst invullen in $f^{inv}(x)$ geeft: $f^{inv}(0) = e^{2*0} = 1$, dit klopt dus.

Vraag 8 (examenopgave 2015 I – vraag 4)
In de tabel kun je aflezen dat bij $m = 1{,}0$ en bij $m = 6{,}0$:

m	$1{,}0$	$6{,}0$
L	$1{,}0 * 10^{-6}$	$1{,}0 * 10^{-8}$

Dit invullen in de formule $L = 10^{p+qm}$ geeft:

Voor $m = 1{,}0$: $\quad 10^{-6} = 10^{p+q*1{,}0}$

Voor $m = 6{,}0$: $\quad 10^{-8} = 10^{p+q*6{,}0}$

Doordat er aan beide kanten hetzelfde grondtal staat (10), kan deze worden weggestreept:

Voor $m = 1{,}0$: $\quad -6 = p + 1{,}0q$

Voor $m = 6{,}0$: $\quad -8 = p + 6{,}0q$

Door middel van substitutie kun je eerst één variabele bereken:

$$-6 = p + 1{,}0q \rightarrow p = -6 - q$$

Dit invullen in de 2e functie $-8 = p + 6{,}0q$ geeft:

$$-8 = -6 - q + 6{,}0q$$

$$-8 = -6 + 5{,}0q$$

$$q5{,}0q = -2$$

$$q = -\frac{2}{5{,}0} = -0{,}4$$

Een andere oplossingsstrategie is om deze vergelijkingen onder elkaar te zetten en af te trekken:

$$-6 = p + 1{,}0q$$

$$-8 = p + 6{,}0q$$

______________________ -

$$2 = 0 - 5q$$

$$q = -\frac{2}{5}$$

Om p te berekenen moet je q invullen in één van de formules, $-8 = p + 6{,}0q$ geeft:

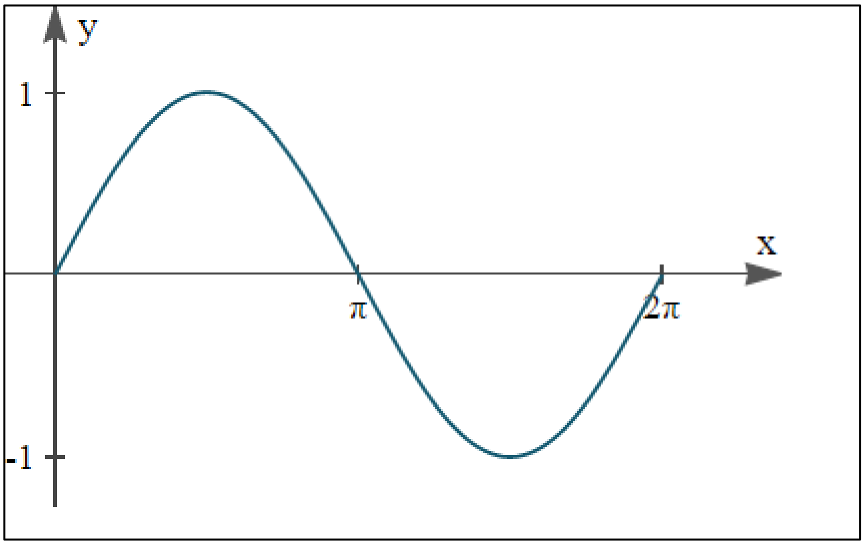
$$-8 = p - 6{,}0 * 0{,}4$$

$$-8 = p - 2{,}4$$

$$p = -5{,}6$$

Dit klopt dus. Bij $m = 1{,}0$ en $m = 6{,}0$ krijg je een waarde van $p = -5{,}6$ en $q = -0{,}4$.

Vraag 9 (examenopgave 2005 II – vraag 1)
Bereken eerst de coördinaten van de punten O, A en T. Zoals je ook al hebt geleerd in domein B2 ziet de standaardgrafiek van een sinus er zo uit:



Hier kun je dus punt O, A en T aflezen:

$$O = (0{,}0)$$

$$A = (\pi, 0)$$

$$T = (\frac{\pi}{2}, 1)$$

Je kunt kijken of de grafiek van g door punt O, A en T gaat door de x-coördinaten in te vullen van de punten in $g(x) = ax(x - \pi)$. Als hier dezelfde y-coördinaten uitkomen dan gaat grafiek g ook door de punten. Met $a = -\frac{4}{\pi^2}$.

$$g(0) = -\frac{4}{\pi^2} * 0(0 - \pi) = 0 * -\pi = 0 \rightarrow punt\ O$$

$$g(\pi) = -\frac{4}{\pi^2} * \pi(\pi - \pi) = -\frac{4}{\pi} * 0 = 0 \rightarrow punt\ A$$

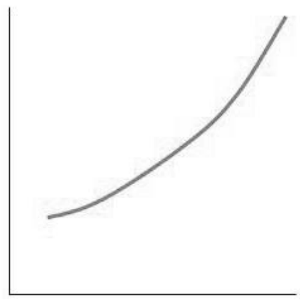
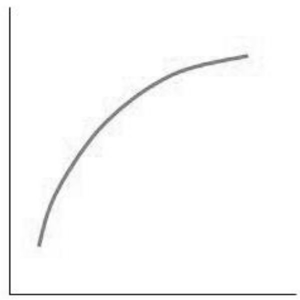
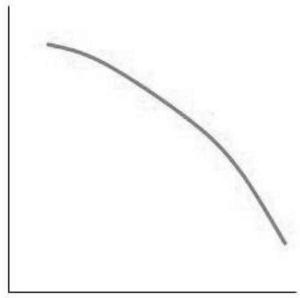
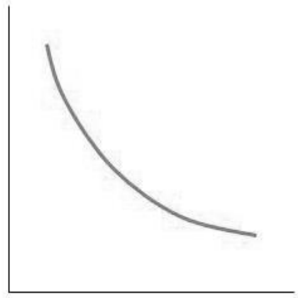
$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{4}{\pi^2} * \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) = -\frac{2}{\pi} * -\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \rightarrow punt\ T$$

Dus de grafiek van g gaat door O, A en T.

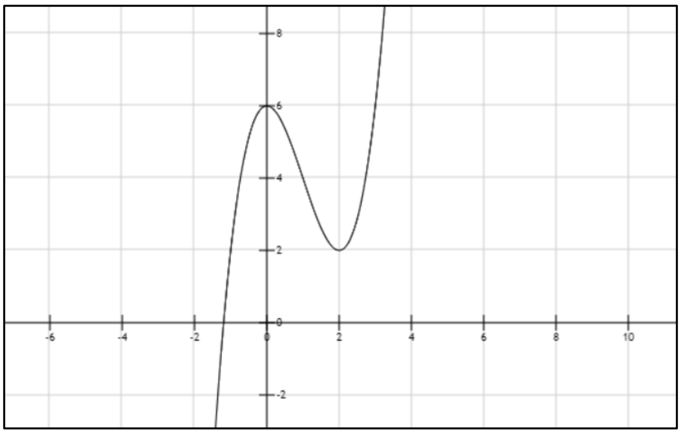
Uitwerkingen Domein C1

Vraag 1

De afgeleide is kleiner dan nul ($f'(x) < 0$) en de tweede afgeleide is kleiner dan nul ($f''(x) < 0$). Dit aflezen uit bovenstaande tabel laat zien dat er sprake is van een toenemende daling.

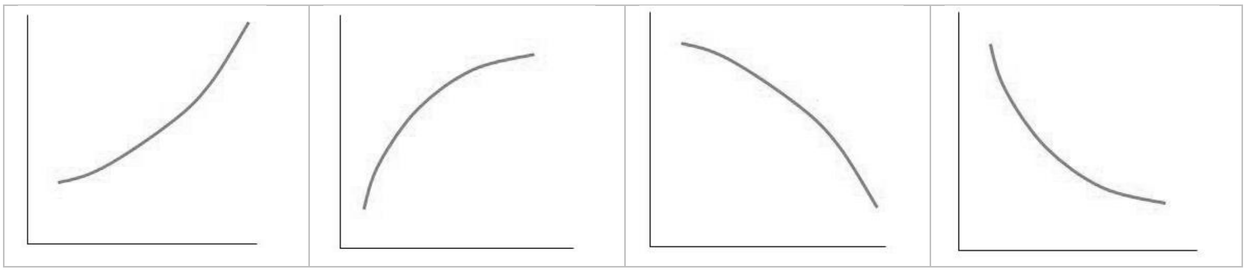
	Toenemende stijging	**Afnemende stijging**
$\boldsymbol{f'(x)} > 0$	 $f''(x) > 0$	 $f''(x) < 0$
	Toenemende daling	**Afnemende daling**
$\boldsymbol{f'(x)} < 0$	 $f''(x) < 0$	 $f''(x) > 0$

Vraag 2



Gebruik de volgende tabel:

Toenemende stijging	**Afnemende stijging**	**Toenemende daling**	**Afnemende daling**



Als je deze tabel vergelijkt met de grafiek zie je:

$x \approx \langle \leftarrow\ , 0\rangle$	Afnemende stijging
$x \approx 0$	Top
$x \approx \langle 0\ , 1\rangle$	Toenemende daling
$x \approx 1$	Buigpunt
$x \approx \langle 1\ , 2\rangle$	Afnemende daling
$x \approx 2$	Top
$x \approx \langle 2\ , \rightarrow\rangle$	Toenemende stijging

Vraag 3

De functie f is gegeven door:

$$f(x) = \sqrt{1-x}$$

Voor de toppen geldt:

$$f'(x) = 0$$

$$f'(x) = -6x^2 + 48x - 42 = 0$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$(x-1)(x-7) = 0$$

$$x = 1 \quad of \quad x = 7$$

Invullen in de formule $f(x)$ geeft:

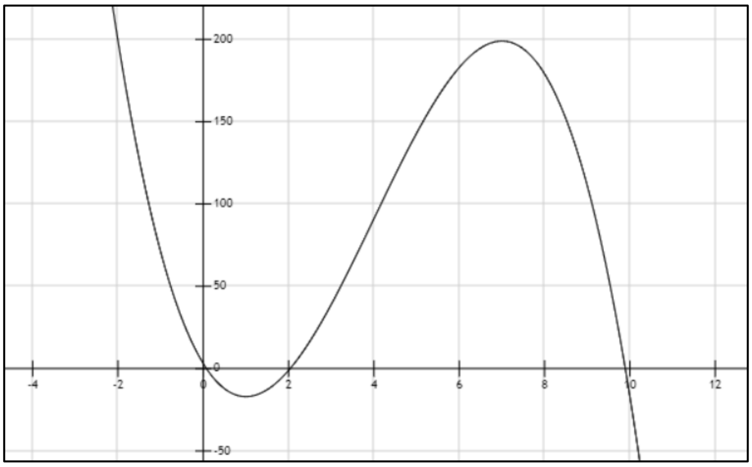
$$x = 1 \rightarrow\ f(1) = -2 * 1^3 + 24 * 1^2 - 42 * 1 + 3 = -17$$

$$x = 7 \rightarrow\ f(7) = -2 * 7^3 + 24 * 7^2 - 42 * 7 + 3 = 199$$

Dus de toppen zijn:

$$(1, -17\ )\ \&\ (7, 199)$$

Dit klopt als je kijkt naar de grafiek:



Vraag 4

Gegeven:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 5}$$

Om te kijken welk soort daling er is moeten we de tweede afgeleide bepalen. We gebruiken de quotiëntregel:

$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \dfrac{g(x) * f'(x) - f(x) * g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 5)(2x) - (x^2 - 3)(2x)}{(x^2 - 5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{((x^2 - 5) - (x^2 - 3))(2x)}{x^4 - 10x^2 + 25}$$

$$f'(x) = \frac{(-2)(2x)}{x^4 - 10x^2 + 25}$$

$$f'(x) = \frac{-4x}{x^4 - 10x^2 + 25}$$

Om de tweede afgeleide te berekenen maken we weer gebruik van de quotiëntregel.

$$f''(x) = \frac{(x^4 - 10x^2 + 25)(-4) - (-4x)(4x^3 - 20x)}{(x^4 - 10x^2 + 25)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-4x^4 + 40x^2 - 100) - (-16x^4 + 80x^2)}{(x^4 - 10x^2 + 25)^2}$$

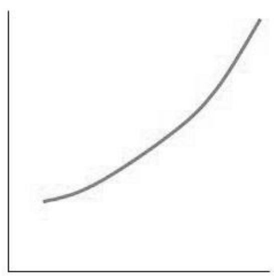
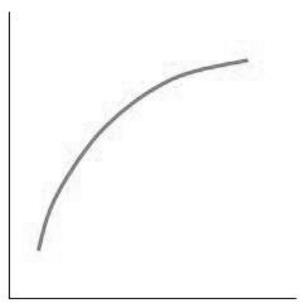
$$f''(x) = \frac{12x^4 - 40x^2 - 100}{(x^4 - 10x^2 + 25)^2}$$

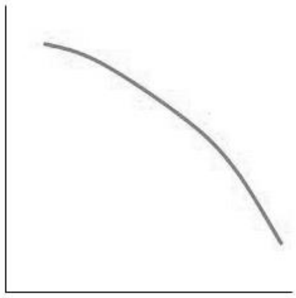
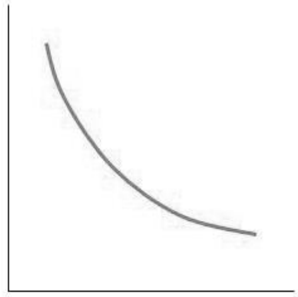
Dit geeft een daling in punt $A(1{,}8)$ van:

$$f'(1) = \frac{-4}{1 - 10 + 25} = -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4}$$

$$f''(1) = \frac{12 - 40 - 100}{(1 - 10 + 25)^2} = \frac{-128}{16^2} = \frac{128}{256} = -\frac{1}{2}$$

Oftewel, $f'(1) < 0$ en $f''(1) < 0$.

	Toenemende stijging	**Afnemende stijging**
$\boldsymbol{f'(x)} > 0$	 $f''(x) > 0$	 $f''(x) < 0$
	Toenemende daling	**Afnemende daling**

$\boldsymbol{f'(x) < 0}$	 $f''(x) < 0$	 $f''(x) > 0$

De tabel geeft dus aan dat het een toenemende daling is.

Uitwerkingen Domein C2

Vraag 1

Gegeven:

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 + x$$

Gebruik:

$f(x) = ax^n$	$f'(x) = n * ax^{n-1}$

En de somregel:

$y = f(x) + g(x)$	$y' = f'(x) + g'(x)$

$f(x) = 4x^3 + 2x^2 + x$ differentiëren geeft dan:

$$f'(x) = 12x^2 + 4x + 1$$

Vraag 2

Gegeven:

$$f(x) = (4x - 2)^4$$

Gebruik:

Functie	Afgeleide
$\boldsymbol{f(x) = ax^n}$	$f'(x) = n * ax^{n-1}$
$\boldsymbol{f(x) = ax}$	$f'(x) = a$

En de kettingregel:

$f(x) = f(g(x))$	$f(x)' = f'(g(x)) * g'(x)$

Stel:

Functie	Afgeleide
$\boldsymbol{g(x) = (4x - 2)}$	$g'(x) = 4$
$\boldsymbol{f(g(x)) = g(x)^4}$	$f'(g(x)) = 4\, g(x)^3$

Invullen in de kettingregel geeft dan:

$$f'(x) = f'(g(x)) * g'(x) = 4\, g(x)^3 * 4$$

$g(x)$ invullen geeft:

$$f'(x) = 4 * (4x - 2)^3 * 4 = 16 * (4x - 2)^3$$

Vraag 3

Gegeven:

$$h(x) = 5x^3 - \ln(x)$$

Gebruik:

Functie	Afgeleide
$\boldsymbol{f(x) = ax^n}$	$f'(x) = n * ax^{n-1}$

$\boldsymbol{f(x) = \ln(x)}$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

En de verschilregel:

$\boldsymbol{y = f(x) - g(x)}$	$\boldsymbol{y' = f'(x) - g'(x)}$

Stel:

Functie	Afgeleide
$\boldsymbol{f(x) = 5x^3}$	$f'(x) = 15x^2$
$\boldsymbol{g(x) = \ln(x)}$	$g'(x) = 1/x$

Invullen in de verschilregel geeft dan:

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 15x^2 - \frac{1}{x}$$

Vraag 4

Bij het buigpunt geldt dat $f''(x) = 0$. Dus we gaan eerst de afgeleide van de functie $f(x)$ berekenen en vervolgens deze afgeleide nog een keer differentiëren tot de tweede afgeleide.

De afgeleide van $f(x) = x^3 - 3 * x^2 + 6$:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

De tweede afgeleide:

$$f''(x) = 6x - 6$$

Deze gelijkstellen aan nul geeft de x –coördinaat van het buigpunt:

$$f''(x) = 6x - 6 = 0$$

$$6x = 6$$

$$x = 1$$

Door x in de functie in te vullen bereken je de y-coordinaat van het buigpunt:

$$f(1) = 1^3 - 3 * 1^2 + 6 = 4$$

Dus het buigpunt bevindt zich op $(1{,}4)$. Als je kijkt naar de grafiek kun je zien dat dit klopt!

Vraag 5

Gegeven:

$$f(x) = ax^3 + 2x^2 + 5x + b$$

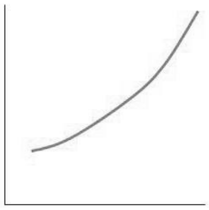
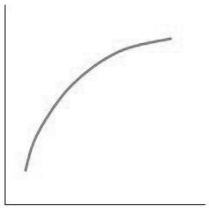
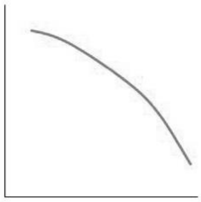
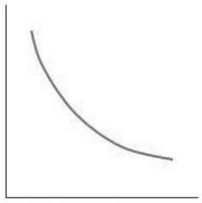
Toenemend stijgend naar afnemend stijgend betekent dus dat eerst:

$$\boldsymbol{f'(x)} > 0 \; en \; f''(x) > 0$$

Vervolgens:

$$\boldsymbol{f'(x)} > 0 \; en \; \boldsymbol{f''(x)} < 0$$

	Toenemende stijging	**Afnemende stijging**

$\boldsymbol{f'(x)} > 0$	 $f''(x) > 0$	 $f''(x) < 0$
	Toenemende daling	**Afnemende daling**
$\boldsymbol{f'(x)} < 0$	 $f''(x) < 0$	 $f''(x) > 0$

$$f'(x) = 3ax^2 + 4x + 5$$

$$f''(x) = 6ax + 4$$

Eerst:

$$\boldsymbol{f'(x)} > 0 \; en \; f''(x) > 0$$

Vervolgens:

$$\boldsymbol{f'(x)} > 0 \; en \; \boldsymbol{f''(x)} < 0$$

Oftewel punt $(2{,}10)$ ligt op $\boldsymbol{f''(x)} = 0$:

$$f''\,(2) = 0$$

$$12a + 4 = 0$$

$$a = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$$

Invullen in $f(x)$ geeft:

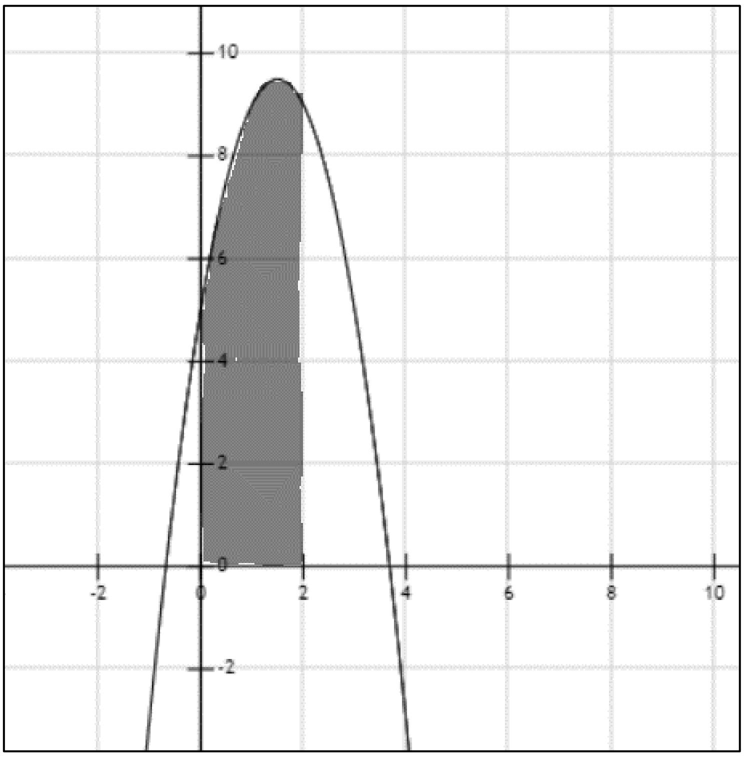
$$f(2) = -\frac{1}{3} * 2^3 + 2 * 2^2 + 5 * 2 + b = 10$$

$$-\frac{1}{3} * 8 + 2 * 4 + 5 * 2 + b = 10$$

$$b = -\frac{8}{3} + 8 + 10 - 10$$

$$b = 5\frac{1}{3}$$

Uitwerkingen Domein C3



Als je een oppervlak tussen een bepaalde functie en de x-as wilt berekenen dan kun je dit doen door de integraal van die functie te nemen:

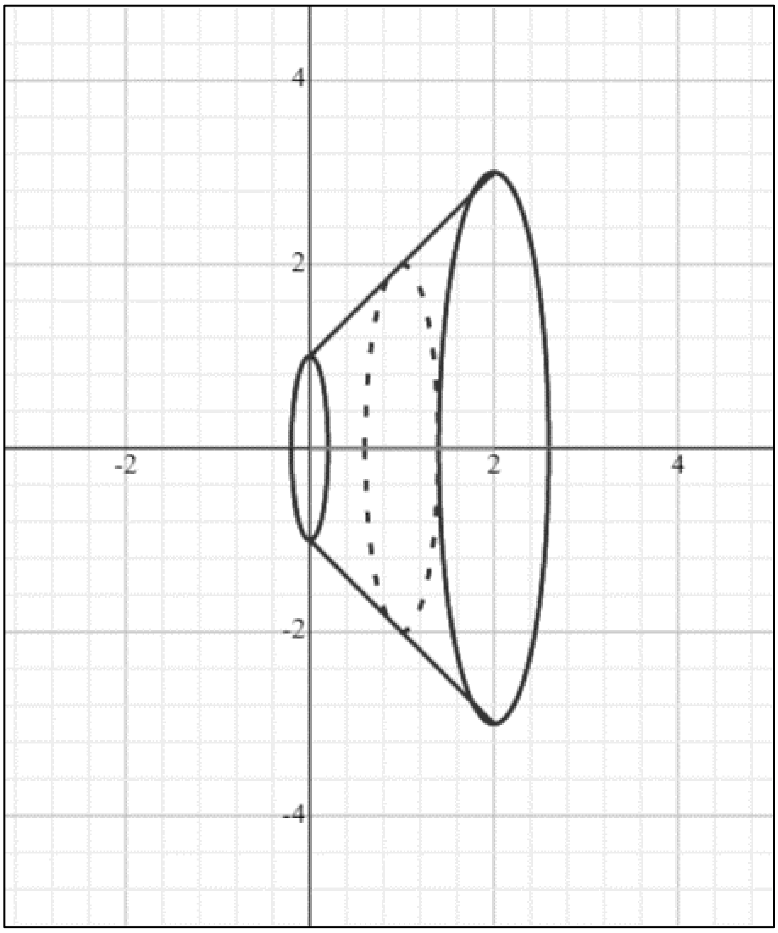
$$opp = \int_a^b f(x)\,dx =$$

$$\int_0^2 (-2x^2 + 6x + 5)dx =$$

$$[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 + 5x]_0^2 = [-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 + 5x]_0^2 =$$

$$\left(-\frac{2}{3} * 2^3 + 3 * 2^2 + 5 * 2\right) - (0) = 16\frac{2}{3}$$

Vraag 2



Om de inhoud te berekenen van een grafiek die om de x-as wentelt, moet je de volgende formule gebruiken:

$$Inhoud = \int_a^b \pi * \left(f(x)\right)^2 dx = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$

$f(x) = x + 1$ invullen:

$$Inhoud = \pi \int_a^b (x+1)^2 dx = \pi \int_a^b (x^2 + 2x + 1) dx$$

De grenzen $x = 0$ en $x = 2$ invullen en de primitieve berekenen geeft:

$$Inhoud = \pi \int_0^2 (x^2 + 2x + 1) dx = \pi * [\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x]_0^2$$

$x = 0$ en $x = 2$ invullen:

$$Inhoud = \pi * [\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x]_0^2 = \pi * \left(\left(\frac{1}{3} * 2^3 + 2^2 + 2\right) - (0)\right) = 8\frac{2}{3}\pi$$

Vraag 3

Er staat exact. Dus voor snijpunten met de x-as geldt $f(x) = 0$.

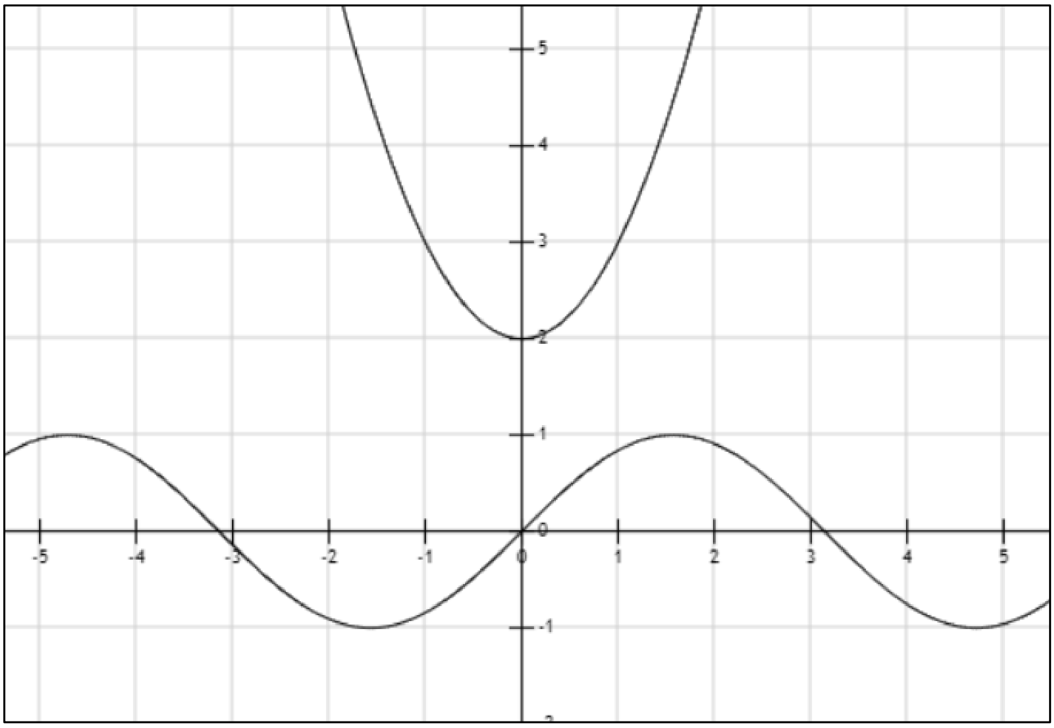
$$f(x) = 3 + 2x - x^2 = 0$$
$$-x^2 + 2x + 3 = 0$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$(x+1)(x-3) = 0$$
$$x = -1 \quad x = 3$$

De oppervlakte is dan:

$$A = \int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{3} (3 + 2x - x^2)dx = \ [3x + x^2 - \frac{1}{3}x^3]_{-1}^{3} = \frac{32}{3}$$

Vraag 4

Zoals je in de grafiek kunt zien ligt de grafiek van f boven de grafiek van g:



De formule voor de oppervlakte wordt dan:

$$opp = \int_a^b (grafiek\ boven - grafiek\ onder)dx$$

$$opp = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

$$opp = \int_{-1}^{2} (x^2 + 2 - \sin(x))dx$$

$$opp = \ [\frac{1}{3}x^3 + 2x + \cos(x)]_{-1}^{2}$$

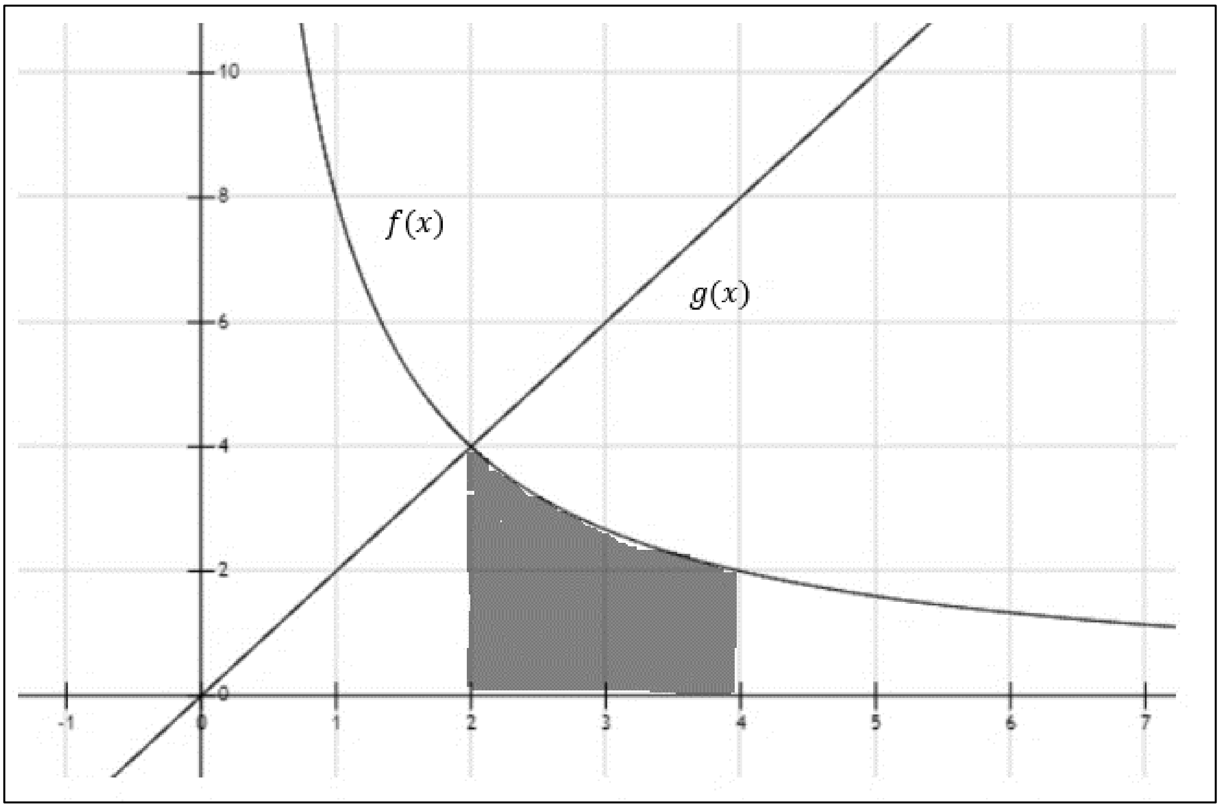
$$opp = \left(\frac{1}{3}(2)^3 + 2 * 2 + \cos(2)\right) - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 + 2 * (-1) + \cos(-1)\right)$$

$$opp = \ \left(\frac{8}{3} + 4 + \cos(2)\right) - \left(-\frac{1}{3} - 2 + \cos(-1)\right)$$

$$opp = 8{,}04$$

Vraag 5

Zoals je in de grafiek kunt zien ligt de grafiek van f onder de grafiek van g tussen het snijpunt en $x = 4$:



Bepalen wat de x-waarde van het snijpunt is:

$$f(x) = g(x)$$

$$\frac{8}{x} = 2x$$

$$x^2 = 4$$

De grenzen van het gevraagde gebied zijn:

$$2 \leq x \leq 4$$

De formule voor de oppervlakte wordt dan:

$$A = \int_a^b (grafiek\ boven - grafiek\ onder)dx$$

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$$

$$A = \int_2^4 \left(2x - \frac{8}{x})\right) dx = \ [x^2 - 8 * ln|x|]_2^4$$

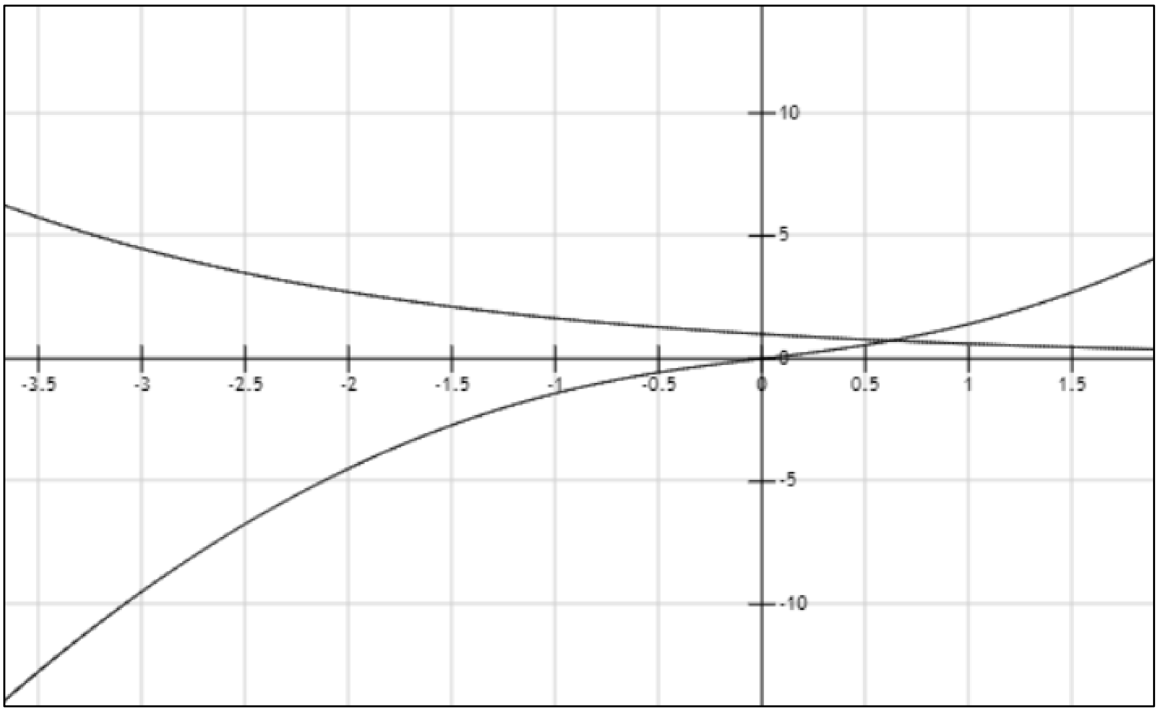
$$A = (4^2 - 8 * ln|4|) - (2^2 - 8 * ln|2|)$$

$$A = 16 - 8 * ln|4| - 4 + 8 * ln|2|)$$

$$A = 12 - 8 * ln|4| + 8 * ln|2|)$$

$$A = 6{,}45$$

Vraag 6
Zoals je in de grafiek kunt zien ligt de grafiek van f onder de grafiek van g:



De formule voor de oppervlakte wordt dan:

$$A = \int_a^b (grafiek\ boven - grafiek\ onder)dx$$

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$$

$$A = \int_{-3}^{0} \left(e^{-\frac{1}{2}x} - x\sqrt{x^2+1}\right)dx =$$

$$A = \int_{-3}^{0} \left(e^{-\frac{1}{2}x} - x(x^2+1)^{0,5}\right)dx =$$

$$A = [-2 * e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}]_{-3}^{0}$$

$$A = (-2 * e^{-\frac{1}{2}*0} - \frac{1}{3}(0^2+1)^{\frac{3}{2}}) - (-2 * e^{-\frac{1}{2}*3} - \frac{1}{3}(3^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$A = (-2 - \frac{1}{3}(1)^{\frac{3}{2}}) - (-2 * e^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(10)^{\frac{3}{2}})$$

$$A = -\frac{7}{3} + 2 * e^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} * 10^{\frac{3}{2}} = 17,17$$

Uitwerkingen Domein C

Vraag 1 (examenopgave 2009-II - vraag 15)

In de driehoek MGE kan de stelling van Pythagoras worden toegepast:

$$EG^2 + GM^2 = EM^2$$

Waar:

$$EG = p$$

$GM = HM - 2$ en $HM = r$ geeft:

$$GM = r - 2$$

$$EM = r$$

Invullen in de formule geeft:

$$p^2 + (r-2)^2 = r^2$$

Verder uitwerken:

$$p^2 + r^2 - 4r + 4 = r^2$$

$$4r = p^2 + 4$$

$$r = \frac{1}{4}p^2 + 4$$

Vraag 2 (examenopgave 2015-I - vraag 6)

We gaan eerst de richtingscoëfficiënt berekenen van lijnstuk AB:

$$rc_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - -1}{7 - 5} = 1$$

Omdat lijnstuk AB en lijn l loodrecht op elkaar staan, geldt:

$$rc_{AB} * rc_l = -1$$

$$1 * rc_l = -1$$

$$rc_l = -1$$

De lijn l wordt dan:

$$y = -x + b$$

Punt $B(7,1)$ invullen om een formule op te stellen:

$$1 = -7 + b$$

$$b = 8$$

$$l: \quad y = -x + 8$$

Om punt P te bereken gaan we op zoek naar het snijpunt met de x-as:

$$0 = -x + 8$$

$$x = 8$$

Dus punt $P = (0,8)$

De straal van c is gelijk aan MB:

$$MB = \sqrt{(x_m - x_B)^2 + (y_m - y_B)^2} = \sqrt{(4-7)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{10}$$

Afstand tussen het middelpunt en P:

$$MP = \sqrt{(x_p - x_m)^2 + (y_p - y_m)^2} = \sqrt{(8-4)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{20}$$

Dus de afstand van P tot c =

$$MP - MB = \sqrt{20} - \sqrt{10}$$

Vraag 3 (examenopgave 2016 II – vraag 10 (pilot))
Draaien om de y-as, dus er geldt:

$$Inhoud \ = \ \pi \int_0^1 x^2 \ dy$$

Omdat de figuur symmetrisch is om de lijn $y = 1$ hoef je alleen maar het onderste deel uit te rekenen en dan het antwoord vermenigvuldigen met 2. Dus er geldt:

$$Inhoud \ = \ 2 * \ \pi \int_0^1 x^2 \ dy$$

Je wilt x^2 vinden. Dit kun je doen door de formule van y om te schrijven:

$$y = \ln(x^2 + 1) \rightarrow x^2 = e^y - 1$$

Dit invullen geeft:

$$Inhoud \ = \ 2 * \ \pi \int_0^1 (e^y - y \ ) \ dy = 2\pi * [e^y - y]_0^1$$

$$Inhoud = 2\pi(e^1 - 1) - 2\pi(e^0 - 0)$$

$$Inhoud = 2\pi(e^1 - 1 - 1 + 0)$$

$$Inhoud = 2\pi(e^1 - 2)$$

Vraag 4 (examenopgave 2011 I – vraag 3)

$$Inhoud \ = \ \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(f(x)\right)^2 dx - \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (x^2) dx$$

$$Inhoud \ = \ \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1-x}\right)^2 \ dx - \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (x^2) dx$$

$$Inhoud \ = \ \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x) dx - \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (x^2) dx$$

$$Inhoud = \pi * [x - \frac{1}{2}x^2]_0^{\frac{1}{2}} - \pi * [\frac{1}{3}x^3]_0^{\frac{1}{2}}$$

De inhoud van het omwentelingslichaam is dus:

$$Inhoud = \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{24} = \frac{1}{3}\ \pi$$

Vraag 5 (examenopgave 2010 I – vraag 2)
Als je het oppervlak tussen twee verschillende grafieken wilt berekenen moet je gebruik maken van de volgende functie:

$$S = \int_a^b z(x) \ dx$$

Waarin:

$$S = oppervlakte$$

$$z(x) = bovenste \ functie \ f(x) - onderste \ functie \ g(x)$$

De parabool (y = $4x - x^2$) is de bovenste functie, de rechte lijn (y = ax) is de onderste functie, dan krijg je een formule voor $z(x)$:

$$z(x) = 4x - x^2 - ax$$

De oppervlakte wordt dan:

$$S = \int_0^{4-a} (4x - x^2 - ax)\, dx$$

Primitieve uitwerken geeft:

$$S = [2x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2]_0^{4-a}$$

De grenzen invullen in de formule geeft:

$$S = \left(2(4-a)^2 - \frac{1}{3}(4-a)^3 - \frac{a}{2}(4-a)^2\right) - \left(2 * 0^2 - \frac{1}{3} * 0^3 - \frac{a}{2}x * 0^2\right)$$

$$S = \frac{1}{6}(4-a)^3$$

Uitwerkingen Domein D

Vraag 1

Kijk naar de volgende tabel:

Symmetrieformules
$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = \cos(\alpha)$
$\tan(\pi - \alpha) = \tan(\alpha)$
Verbanden
$\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \cos(\alpha)$
$\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = \sin(\alpha)$
$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
Somformules
$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) * \cos(\beta) + \cos(\alpha) * \sin(\beta)$
$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) * \cos(\beta) - \cos(\alpha) * \sin(\beta)$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) * \cos(\beta) - \sin(\alpha) * \sin(\beta)$
$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) * \cos(\beta) + \sin(\alpha) * \sin(\beta)$
Verdubbelingsformules
$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

Dus:

$$-sin(x - 2\pi) = sin(-x + 2\pi)$$

Gebruik vervolgens de regel waarin je de sinus omzet naar een cosinus:

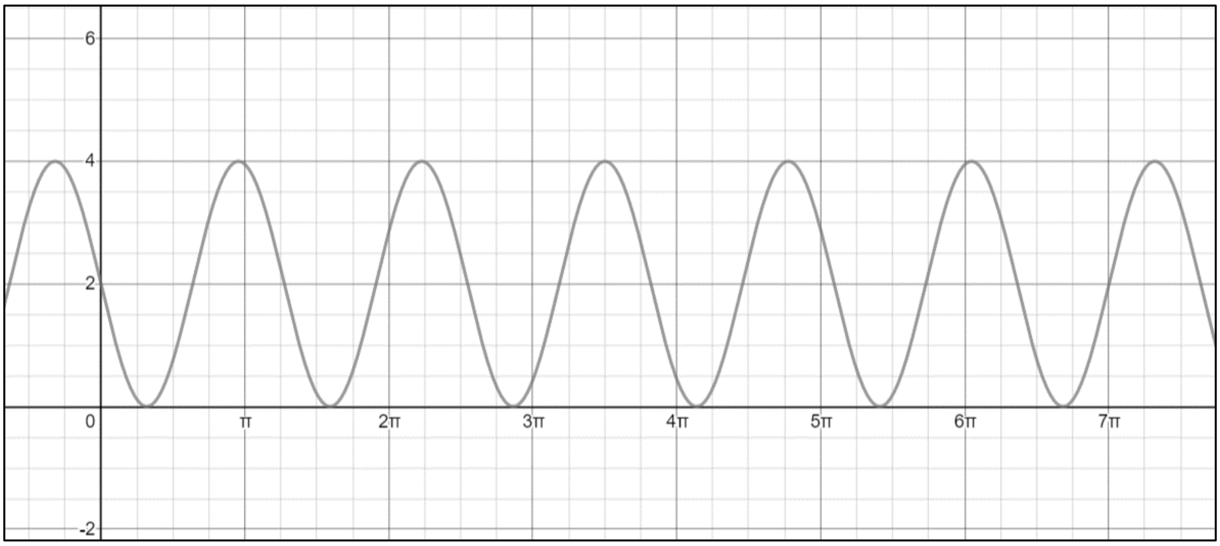
$$sin(\alpha) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right)$$

Dit toepassen geeft:

$$sin(\alpha) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - (-x + 2\pi)\right) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi + x - 2\pi)\right) = \cos\left(x - 1\frac{1}{2}\pi\right)$$

Door de formules $\cos\left(x - 1\frac{1}{2}\pi\right)$ & $-sin(x - 2\pi)$ beide in je rekenmachine in te vullen kun je controleren of het klopt. Er zou namelijk exact dezelfde grafiek uit moeten komen. Superhandig dus!

Vraag 2



Zoals je kunt aflezen uit de grafiek is de evenwichtsstand rond het punt $a = 2$. De amplitude, $b = 2$. De tijd voor $5\frac{1}{2}$ golf is 7π. Oftewel de periode (de tijd voor één golf) is $T = \frac{7\pi}{5\frac{1}{2}} = \frac{14}{11}\pi$ Dit betekent dus dat $c = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{14}{11}\pi} = \frac{22}{14} = \frac{11}{7}$. Verder gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand bij $t_0 \approx 2$. Dit invullen in de formule:

$$h(t) = a + b * \sin\left(c(t - t_0)\right)$$

Geeft:

$$h(t) = 2 + 2 * \sin\left(\frac{11}{7}(t - 2)\right)$$

Controleren door dit in je rekenmachine in te voeren toont aan dat het klopt!

Vraag 3 (examenopgave 2011 I – vraag 13)
Voor snijpunten met de x-as geldt: $f(x) = 0$.

Dus:

$$\sin(x) + 2\sin(x) = 0$$

$$\sin(x) + 2 * \sin(x)\cos(x) = 0$$

$$\sin(x)(1 + 2\cos(x)) = 0$$

$$\sin(x) = 0 \quad of \quad (1 + 2\cos(x)) = 0$$

$$2\cos(x) = -1$$

$$\cos(x) = -\frac{1}{2}$$

$$x = 0 + k\pi \quad of \quad x = \frac{2}{3}\pi + k\pi \quad of \quad x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$$

Kijken in grafiek geeft:

$$x = \frac{2\pi}{3}$$

De x-coördinaat van punt B is dus $x = \frac{2\pi}{3}$.

Vraag 4 (examenopgave 2012 I – vraag 9)

$$f(x) + g(x) = sin(x) + sin\left(x + \frac{1}{3} * \pi\right)$$

Gebruik de volgende regel:

$$\sin(x) + \sin(y) = 2sin\left(\frac{x+y}{2}\right)cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Invullen geeft:

$$f(x) + g(x) = 2sin\left(\frac{x + x + \frac{1}{3}\pi}{2}\right)cos\left(\frac{x - \left(x + \frac{1}{3}\pi\right)}{2}\right)$$

$$= 2sin\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)cos(-\frac{1}{6}\pi)$$

$$= 2sin\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3} * sin\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)$$

Dit invullen in $h(x) = \frac{1}{2} * (f(x) + g(x))$ geeft:

$$\frac{1}{2} * \sqrt{3} * sin\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)$$

Dus:

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad en \quad b = \frac{1}{6}\pi$$

Vraag 5 (examenopgave 2013 II – vraag 11)

Gegeven:

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}$$

De lijn met vergelijking $x = 1$ snijdt de baan van P in de punten: (1, 0) $(1, a)$ en $(1, -a)$, met $a > 0$.

De vergelijking $2cos(t) - cos(2t) = 1$ moet worden opgelost. We gebruiken de verdubbelingsformule:

$$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$$

Invullen in bovenstaande formule geeft:

$$2cos(t) - (2\cos^2 t - 1) = 1$$

$$2cos(t) - 2\cos^2 t + 1 = 1$$

$$2cos(t) - 2\cos^2 t = 0$$

$$\cos(t) - \cos^2(t) = 0$$

$$\cos(t)(1 - \cos(t)) = 0$$

$$\cos(t) = 0 \; of \; \cos(t) = 1$$

Dit geeft:

$$t = 0 + 2k\pi \quad of \quad t = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi \quad of \quad t = 1\frac{1}{2}\pi \ + 2k\pi \quad of \ t = 2\pi + 2k\pi$$

Noteer eerst de hele formule van y en vul alle oplossingen in:

$$y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t)$$

$$y\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2$$

$$dus \ a = 2$$

Vraag 6 (examenopgave 2012 II – vraag 5)
Gegeven:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\sin(t) \\ y(t) = \sin(t + \frac{1}{3}\pi) \end{cases}$$

In punt A en B geldt $y = 2x$, dus met deze bewegingsvergelijkingen wordt het:

$$\sin\left(t + \frac{1}{3}\pi\right) = \sin(t)$$

Dus:

$$t + \frac{1}{3}\pi = t + k * 2\pi \quad of \quad t + \frac{1}{3}\pi = \pi - t + k * 2\pi \ (met \ k \ geheel)$$

Hieruit volgt voor: $0 \leq t \leq 2\pi$:

$$t = \frac{1}{3}\pi \quad of \quad t = 1\frac{1}{3}\pi$$

Invullen in de bewegingsvergelijking geeft de volgende coördinaten:

$$A = (\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right), \sin\left(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{3}\pi\right))$$

$$B = (\frac{1}{2}\sin\left(1\frac{1}{3}\pi\right), \sin\left(1\frac{1}{3}\pi + 1\frac{1}{3}\pi\right))$$

$$A = (\frac{1}{4}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$$

$$B = (-\frac{1}{4}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$$

Uitwerkingen Domein E1

Vraag 1

Cosinusregel:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

We moeten dus voor de laatste kiezen:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

Invullen geeft:

$$c^2 = 8^2 + 11^2 - 2*8*11*\cos(37°)$$

$$c^2 = 64 + 121 - 176*\cos(37°)$$

$$c^2 = 185 - 176*\cos(37°)$$

$$c^2 \approx 44{,}44$$

$$c \approx \sqrt{44{,}44} = 6{,}67$$

Vraag 2

Gebruik de sinusregel om zo alle zijdes en hoeken te bereken:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Vul eerst in wat je al weet:

$$\frac{7}{\sin(60)} = \frac{x}{\sin(80)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

x berekenen:

$$x = \frac{7}{\sin(60)} * \sin(80) = 7{,}96$$

Uitwerkingen Domein E2

Vraag 1

$$d(P,S) = \sqrt{(x_P - x_S)^2 + (y_P - y_S)^2}$$

$P = (7{,}4) \rightarrow\ x_P = 7,\ y_P = 4$

$S = (2{,}5) \rightarrow\ x_s = 2,\ y_s = 5$

$$d(P,S) = \sqrt{(7-2)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

Vraag 2

lijn: $y = x + 2$

cirkel: $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 4$

Je kunt het snijpunt berekenen door y van de lijnformule in te vullen in de y van de cirkelformule:

$$(x-4)^2 + (x+2-4)^2 = 4$$

Uitwerken geeft:

$$x^2 - 8x + 16 + x^2 - 4x + 4 = 4$$

Verder uitwerken:

$$2x^2 - 12x + 16 = 0$$

Delen door 2:

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Ontbinden:

$$(x-4)(x-2) = 0$$

Dus:

$$x = 4 \quad of \quad x = 2$$

Invullen in de lijnformule: $y = x + 2$:

$$x = 4 \rightarrow \; y = 4 + 2 = 6$$

$$x = 2 \rightarrow \; y = 2 + 2 = 4$$

De snijpunten zijn dus $(4{,}6)$ en $(2{,}4)$.
Controleren door deze in te vullen in de cirkel:

$(4{,}6) \rightarrow$	$(4-4)^2 + (6-4)^2 = 4$	KLOPT
$(2{,}4) \rightarrow$	$(2-4)^2 + (4-4)^2 = 4$	KLOPT

Vraag 3
Het middelpunt van de cirkel is dus $M = (-2{,}4)$. Met behulp van het middelpunt en het raakpunt $(0{,}6)$ is dus de richtingscoëfficiënt van de straal te berekenen:

$$rc_{straal} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_P - y_M}{x_P - x_M} = \frac{6-4}{0--2} = \frac{2}{2} = 1$$

Omdat de raaklijn loodrecht op de straal staat, geldt:

$$rc_{straal} * rc_{raaklijn} = -1$$

Dus:

$$1 * rc_{raaklijn} = -1$$

$$rc_{raaklijn} = -1$$

Nu kun je een formule in de vorm $y = ax + b$ opstellen:

$$y = -x + b$$

Vul nu de x- en y-coördinaten van punt P in de formule in:

$$6 = -1 * 0 + b$$

$$b = 6 - 0 = 6$$

De formule voor de raaklijn is dus:

$$y = -x + 6$$

Vraag 4
Schrijf eerst de gehele vergelijking naar links:

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 8 = 0$$

Zet nu de vergelijking in de vorm:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Schrijf dus eerst de vergelijking verder uit:

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 - 8y + 16 - 16 + 8 = 0$$

$$(x-2)^2 - 4 + (y-4)^2 - 16 + 8 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 12$$

Hieruit kun je halen dat:

$$M = (2{,}4)$$

$$r = \sqrt{12}$$

Uitwerkingen Domein E3

Vraag 1
Om het inproduct te berekenen moet je gebruik maken van de volgende formule:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

Invullen geeft:

$$\binom{3}{4} \cdot \binom{2}{1} = 3 * 2 + 4 * 1 = 10$$

Vraag 2
Om de hoek tussen twee vectoren uit te rekenen heb je de volgende formule nodig:

$$\cos(\emptyset) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

We beginnen met de lengtes van de vectoren te berekenen:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Om het inproduct te berekenen moet je gebruik maken van de volgende formule:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

Invullen geeft:

$$\binom{4}{1} \cdot \binom{2}{1} = 4 * 2 + 1 * 1 = 9$$

Als je het inproduct ($\vec{A} \cdot \vec{B} = 9$) tussen twee vectoren en de lengte ($|\vec{A}| = \sqrt{17}$ en $|\vec{B}| = \sqrt{5}$) van de vectoren weet, kun je ook de hoek, $\emptyset$, tussen de twee vectoren berekenen:

$$\cos(\emptyset) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{9}{\sqrt{17} * \sqrt{5}} \approx 0{,}976$$

De hoek $\emptyset$ tussen vector $\vec{a}\ en\ \vec{b}$ is dan:

$$\emptyset \approx \cos^{-1}(0{,}976) \approx 12{,}5\ graden$$

Vraag 3
De parametervoorstelling krijg je door de lijn hetzelfde om te schrijven als hierboven wordt uitgelegd:

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \rightarrow \ l: \begin{cases} x = a + ct \\ y = b + dt \end{cases}$$

Dus de parametervoorstelling van lijn l ($\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$) is:

$$l: \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

Vraag 4
De versnelling van een tijdsafhankelijke vectorvoorstelling kun je gemakkelijk berekenen door de vectoriele snelheid te differentiëren. Daarvoor moeten we deze natuurlijk eerst uitrekenen:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10t + 3 \\ 18t^2 \end{pmatrix}$$

Vervolgens kunnen we de vectoriele versnelling berekenen:

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 36t \end{pmatrix}$$

Vraag 5
Formule voor de raaklijn:

$$rc_k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Waar:

$$x'(t) = 24t - 4$$

$$y'(t) = 6t^2 - 8t$$

Invullen geeft:

$$rc_k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{6t^2 - 8t}{24t - 4}$$

Uitwerkingen oefenexamen

Vraag 1

Lijnen door de oorsprong en een cirkel

1 maximumscore 5

- Een vergelijking van c is $(x-1)^2+(y-7)^2=25$ — 1
- Voor de snijpunten geldt $(t-1)^2+(2t-7)^2=25$ — 1
- Herleiden tot $5t^2-30t+25=0$ — 1
- Een exacte berekening waaruit volgt $t=1$ of $t=5$ — 1
- De snijpunten zijn $(1,2)$ en $(5,10)$ — 1

of

- Een vergelijking van c is $(x-1)^2+(y-7)^2=25$ — 1
- Voor de snijpunten geldt (omdat $x=\frac{1}{2}y$ een vergelijking van k is) $\left(\frac{1}{2}y-1\right)^2+(y-7)^2=25$ — 1
- Herleiden tot $\frac{5}{4}y^2-15y+25=0$ — 1
- Een exacte berekening waaruit volgt $y=2$ of $y=10$ — 1
- De snijpunten zijn $(1,2)$ en $(5,10)$ — 1

Uitwerking vraag 1:

$$M(1,7) \rightarrow r=5$$

Cirkelvergelijking:

$$(x-1)^2+(y-7)^2=5^2$$

Lijn k:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Uitschrijven:

$$x=t$$

$$y=2t$$

Invullen in cirkelvergelijking:

$$(t-1)^2+(2t-7)^2=25$$

$$t^2-2t+1+4t^2-28t+49=25$$

$$5t^2-30t+25=0$$

$$t^2-6t+5=0$$

$$(t-1)(t-5)=0$$

$$t=1 \quad of \quad t=5$$

Invullen geeft:

$$x=1 \rightarrow y=2 \qquad (1,2)$$

$$x=5 \rightarrow y=10 \qquad (5,10)$$

Vraag 2

Rechts van het snijpunt

2 maximumscore 5

- De x-coördinaat van A is 4,5 — 1
- De afgeleide van f is $f'(x) = -6\sin(2x) - \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ — 2
- Beschrijven hoe uit de vergelijking $-6\sin(2x) - \dfrac{1}{\sqrt{2x}} = 0$ de x-coördinaat van B gevonden kan worden — 1
- Deze x-coördinaat is $4{,}7...(> 4{,}5)$, dus B ligt rechts van A — 1

Opmerking
Als de kandidaat bij het differentiëren de kettingregel niet of niet correct heeft toegepast, voor deze vraag maximaal 3 scorepunten toekennen.

Uitwerking vraag 2:
Voor punt A geldt:

$$g(x) = 0$$

$$3 - \sqrt{2x} = 0$$

$$\sqrt{2x} = 3$$

$$2x = 9$$

$$x = 4{,}5$$

Voor punt B geldt:

$$f(x) = 3\cos(2x) - \sqrt{2x}$$

$$f'(x) = (-3\sin(2x)) * 2 - \frac{1}{2\sqrt{2x}} * 2$$

$$f'(x) = -6\sin(2x) - \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

Voor toppen geldt:

$$f'(x) = 0$$

Dus:

$$-6\sin(2x) - \frac{1}{\sqrt{2x}} = 0$$

Invullen in GR met:

$\text{Y1} = 0$

$\text{Y2} = -6\sin(2x) - \frac{1}{\sqrt{2x}}$

In GR de optie '*intersect*' gebruiken geeft als derde snijpunt:

$$x = 4{,}7394 > 4{,}5$$

Oftewel, punt B ligt rechts van punt A.

Vraag 3

Altijd raak

3 maximumscore 5

- $f_p'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-p}}$ 1
- In het raakpunt moet gelden $\dfrac{1}{2\sqrt{x-p}} = 1$ 1
- Hieruit volgt $x = \frac{1}{4} + p$ 1
- $f_p\left(\frac{1}{4}+p\right) = p + \sqrt{\frac{1}{4}+p-p} = p + \frac{1}{2}$ 1
- $x = \frac{1}{4} + p$ invullen in de vergelijking van k geeft $y = \frac{1}{4} + p + \frac{1}{4} = p + \frac{1}{2}$, dus lijn k raakt de grafiek van f_p voor elke toegestane waarde van p 1

of

- Bekijk $g(x) = \sqrt{x}$, dan $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 1
- In het raakpunt moet gelden $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 1$, dus $x = \frac{1}{4}$ 1
- $g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$ en $x = \frac{1}{4}$ invullen in de vergelijking van k geeft $y = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, dus lijn k raakt de grafiek van g 1
- De grafiek van f_p ontstaat uit de grafiek van g door deze p naar rechts en p omhoog te verschuiven 1
- (Deze verschuiving komt overeen met de vector $\begin{pmatrix} p \\ p \end{pmatrix}$ en) dat is de richtingsvector van lijn k, dus lijn k raakt de grafiek van f_p voor elke toegestane waarde van p 1

Uitwerking vraag 3:
Voor raken geldt:

$$p + \sqrt{x-p} = x + \frac{1}{4} \quad en \quad \frac{1}{2\sqrt{x-p}} = 1$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x-p}} = 1$$

$$2\sqrt{x-p} = 1$$

$$\sqrt{x-p} = \frac{1}{2}$$

$$x - p = \frac{1}{4} \quad of \quad x - p = -\frac{1}{4}$$

$$p = x - \frac{1}{4} \quad of \quad p = x + \frac{1}{4}$$

$p = x - \frac{1}{4}$ invullen in $p + \sqrt{x-p} = x + \frac{1}{4}$ geeft:

$$x - \frac{1}{4} + \sqrt{x - x + \frac{1}{4}} = x + \frac{1}{4}$$

$$x - \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{4}} = x + \frac{1}{4}$$

$$x - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = x + \frac{1}{4}$$

$$x + \frac{1}{4} = x + \frac{1}{4}$$

Dus beide voorwaarden gelden voor iedere $p \geq 1$

Vraag 4

Altijd raak

4 **maximumscore 3**

- De x-coördinaat van het randpunt van de grafiek van f_p is p **1**
- $f_{p-1}(x) = p - 1 + \sqrt{x - p + 1}$ **1**
- $f_{p-1}(p) = p = f_p(p)$ (, dus het randpunt van de grafiek van f_p ligt op de grafiek van f_{p-1}) **1**

Uitwerking vraag 4:
Voor randpunt geldt:

$$\sqrt{x - p} = 0$$

$$x - p = 0$$

$$x = p$$

Invullen:

$$y = p + \sqrt{p - p}$$

$$y = p$$

Dus het randpunt is:

$$(p, p)$$

Punt $x = p$ invullen in f_{p-1}:

$$f_{p-1}(x) = p - 1 + \sqrt{x - (p - 1)}$$

$$f_{p-1}(p) = p - 1 + \sqrt{p - p + 1}$$

$$f_{p-1}(p) = p - 1 + \sqrt{1}$$

$$f_{p-1}(p) = p$$

Dus dit geeft punt (p, p) = randpunt.

Vraag 5

Altijd raak

5 maximumscore 5

- Een vergelijking van lijn l is $y = x$ — 1
- De oppervlakte is gelijk aan $\int_1^2 \left(1+\sqrt{x-1}-x\right)\mathrm{d}x$ — 1
- Een primitieve van $1+\sqrt{x-1}-x$ is $x+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2$ — 2
- De oppervlakte is gelijk aan $\frac{1}{6}$ — 1

Uitwerking vraag 5:

$$Punt\ A = (1,1)$$

$$Punt\ B = (2,2)$$

Dus lijn AB:

$$y = ax + b$$

Met:

$$a = \frac{2-1}{2-1} = 1$$

$$b = 0$$

Invullen geeft voor lijn AB:

$$y = x$$

Oppervlakte:

$$opp = \int_1^2 (f_1(x) - g)dx = \int_1^2 \left(1 + \sqrt{x-1} - x\right)dx$$

$$opp = \left[x + \frac{1}{1,5}(x-1)^{1,5} - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$

$$opp = 2 + \frac{2}{3}(2-1)^{1,5} - \frac{1}{2} * 2^2 - \left(1 + \frac{2}{3} * 0^{1,5} - \frac{1}{2} * 1^2\right)$$

$$opp = 2 + \frac{2}{3} - 2 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Vraag 6

Slingshot

6 maximumscore 3

- $L = \sqrt{20^2 + 7^2}$ — 1
- $L = 21{,}18...$ (of $L - 8 = 13{,}18...$) — 1
- $F_\mathrm{k} = 7{,}9$ (kN) — 1

Uitwerking vraag 6:

De grootte van de kracht in een koord:

$$F_k = 0{,}6(L-8)$$

Met L = lengte koord

$$L = AC + CB = 2AC$$

Oftewel:

$$AC^2 = 20^2 + 7^2$$

$$AC = \sqrt{449} \approx 21{,}1896$$

Invullen in de kracht geeft:

$$F_k = 0{,}6(21{,}1896 - 8) = 7{,}9\ kN$$

Vraag 7

Slingshot

7 maximumscore 6

- $L = \sqrt{x^2 + 49}$ 1
- $\cos(\alpha) = \dfrac{x}{L}$ 1
- $F_{\text{kv}} = 2 \cdot 0{,}6 \cdot \left(\sqrt{x^2+49} - 8\right) \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2+49}}$ 1
- De vergelijking $2 \cdot 0{,}6 \cdot \left(\sqrt{x^2+49} - 8\right) \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2+49}} = 1{,}8$ moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking wordt opgelost 1
- $x = 7{,}25\ldots$, dus het antwoord is 13 (m) 1

Uitwerking vraag 7:

$$AC^2 = x^2 + 7^2$$

$$AC = \sqrt{x^2 + 7^2}$$

Invullen geeft:

$$L = AC = \sqrt{x^2 + 49}$$

Invullen in de krachtenformule geeft:

$$F_k = 0{,}6(\sqrt{x^2 + 49} - 8)$$

Dus

$$F_{kv} = 2 * F_k * \cos(\alpha)$$

Invullen:

$$F_{kv} = 2 * 0{,}6(\sqrt{x^2 + 49} - 8) * \cos(\alpha)$$

Er geldt dat:

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 49}}$$

Dus:

$$F_{kv} = 1{,}2(\sqrt{x^2 + 49} - 8) * \frac{x}{\sqrt{x^2 + 49}}$$

Bij stilstand:

$$F_{kv} = 1{,}8$$

Invullen in GR met:

$$\text{Y1} = 1{,}2(\sqrt{x^2+49} - 8) * \frac{x}{\sqrt{x^2+49}}$$

$$\text{Y2} = 1{,}8$$

In GR de optie '*intersect'* gebruiken geeft als snijpunt:

$$x = 7{,}25$$

Bij stilstand geldt dus dat $x = 7{,}25 \approx 7$ dus de hoogte $= 20 - 7 = 13$ meter.

Vraag 8

Een logaritmische functie en haar afgeleide

8 maximumscore 5

• $g(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1$	1
• Uit $f(x) = g(x)$ volgt $x\ln(x) - x + 1 = \ln(x)$	1
• Hieruit volgt $(x-1)\ln(x) = x - 1$	1
• Hieruit volgt $x - 1 = 0$ of $\ln(x) = 1$	1
• Dus $x = 1$ of $x = \mathrm{e}$	1

Uitwerking vraag 8:
Voor snijpunten geldt:

$$f(x) = g(x)$$

Dus:

$$x * \ ln(x) - x + 1 = f'(x)$$

Productregel:

$$x * \ ln(x) - x + 1 = 1 * \ln(x) + x * \frac{1}{x} - 1$$

$$x * \ ln(x) - x + 1 = \ln(x)$$

$$x * \ ln(x) - \ln(x) - x + 1 = 0$$

$$\ln(x)\,(x-1) - (x-1) = 0$$

$$(x-1)(\ln(x) - 1) = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad of \quad \ln(x) - 1 = 0$$

$$x = 1 \quad of \quad \ln(x) = 1$$

$$x = 1 \quad of \quad x = e$$

Vraag 9

Een logaritmische functie en haar afgeleide

9 maximumscore 7

- $\int_p^{2p} g(x)\,\mathrm{d}x = f(2p) - f(p)$ 1
- $f(2p) - f(p) = 2p \cdot \ln(2p) - 2p + 1 - (p \cdot \ln(p) - p + 1)$ 1
- Uit $\int_p^{2p} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ volgt $2p \cdot \ln(2p) - p \cdot \ln(p) = p$ 1
- $2\ln(2p) - \ln(p) = 1$ ($p = 0$ voldoet niet) 1
- Het linkerlid is gelijk aan $\ln\left(\frac{(2p)^2}{p}\right) = \ln(4p)$, dus de vergelijking $\ln(4p) = 1$ moet worden opgelost 2
- Hieruit volgt $p = \frac{1}{4}\mathrm{e}$ 1

of

- $\int_p^{2p} g(x)\,\mathrm{d}x = f(2p) - f(p)$ 1
- $f(2p) - f(p) = 2p \cdot \ln(2p) - 2p + 1 - (p \cdot \ln(p) - p + 1)$ 1
- Uit $\int_p^{2p} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ volgt $2p \cdot \ln(2p) - p \cdot \ln(p) = p$ 1
- $2\ln(2p) - \ln(p) = 1$ ($p = 0$ voldoet niet) 1
- Het linkerlid is gelijk aan $2(\ln(2) + \ln(p)) - \ln(p) = 2\ln(2) + \ln(p)$, dus de vergelijking $\ln(p) = 1 - 2\ln(2)$ moet worden opgelost 2
- Een exacte berekening waaruit volgt $p = \frac{1}{4}\mathrm{e}$ 1

of

- De oppervlaktes van de vlakdelen moeten gelijk zijn en het snijpunt van de grafiek met de x-as ligt bij $x = 1$, dus de vergelijking $-\int_p^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{2p} g(x)\,\mathrm{d}x$ moet worden opgelost 1
- Hieruit volgt de vergelijking $-(f(1) - f(p)) = f(2p) - f(1)$ 1
- Dit geeft $p \cdot \ln(p) - p + 1 = 2p \cdot \ln(2p) - 2p + 1$ 1
- $2\ln(2p) - \ln(p) = 1$ ($p = 0$ voldoet niet) 1
- Het linkerlid is gelijk aan $\ln\left(\frac{(2p)^2}{p}\right) = \ln(4p)$, dus de vergelijking $\ln(4p) = 1$ moet worden opgelost 2
- Hieruit volgt $p = \frac{1}{4}\mathrm{e}$ 1

Uitwerking vraag 9:

$$\int_p^{2p} g(x)dx = 0 \quad \rightarrow \quad \int_p^{2p} f'(x)dx = 0$$

$$\int_p^{2p} \ln{(x)} = 0$$

$$[x * ln(x) - x]_p^{2p} = 0$$

$$(2p * ln(2p) - 2p) - (p * \ln(p) - p) = 0$$

$$2p * ln(2p) - 2p - p * ln(p) + p = 0$$

$$2p * ln(2p) - p * ln(p) - p = 0$$

$$p * (2 * ln(2p) - ln(p) - 1) = 0$$

$$p = 0 \qquad of \qquad (2 * ln(2p) - ln(p) - 1) = 0$$

$$kan\ niet \qquad of \qquad ln(2p)^2 - ln(p) - 1 = 0$$

$$kan\ niet \qquad of \qquad \ln(4p^2) - ln(p) - 1 = 0$$

$$kan\ niet \qquad of \qquad \ln\left(\frac{4p^2}{p}\right) - 1 = 0$$

$$kan\ niet \qquad of \qquad \ln\left(\frac{4p^2}{p}\right) = 1$$

$$kan\ niet \qquad of \qquad \ln(4p) = 1$$

$$kan\ niet \qquad of \qquad 4p = e$$

$$kan\ niet \qquad of \qquad p = \frac{1}{4}e$$

Oftewel:

$$a = \frac{1}{4}$$

Vraag 10

Gebroken goniometrische functie

10 maximumscore 6

- De vergelijking $\dfrac{\cos(x)}{-\sin^2(x)} = \sqrt{2}$ moet worden opgelost — 1
- $\dfrac{\cos(x)}{\cos^2(x) - 1} = \sqrt{2}$ — 1
- Hieruit volgt $\sqrt{2} \cdot \cos^2(x) - \cos(x) - \sqrt{2} = 0$ — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking exact opgelost kan worden — 1
- Dit geeft $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ($\cos(x) = \sqrt{2}$ heeft geen oplossingen) — 1
- Hieruit volgt dat de x-coördinaten van A en B $\frac{3}{4}\pi$ en $\frac{5}{4}\pi$ zijn — 1

Uitwerking vraag 10:
Snijpunt A < B dus:

$$f(x) = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos(x)}{-\sin^2(x)} = \sqrt{2}$$

Maak gebruik van de regel:

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\cos^2(x) - 1 = -\sin^2(x)$$

Invullen in de formule geeft:

$$\frac{\cos(x)}{\cos^2(x) - 1} = \sqrt{2}$$

$$\cos(x) = \sqrt{2} * (\cos^2(x) - 1)$$

$$\sqrt{2} * \cos^2(x) - \cos(x) - \sqrt{2} = 0$$

Invullen $cos(x) = u$:

$$\sqrt{2} * u^2 - u - \sqrt{2} = 0$$

$$\left(u - \sqrt{2}\right)\left(u + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 0$$

$$u = \sqrt{2} \quad of \quad u = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Dus:

$$\cos(x) = \sqrt{2} \quad of \quad \cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$kan\ niet \quad of \quad \mathrm{x} = \frac{3}{4}\pi \quad of \quad x = \frac{5}{4}\pi$$

Vraag 11

Gebroken goniometrische functie

11 maximumscore 6

- De teller en de noemer moeten (voor dezelfde waarde van x) gelijk zijn aan 0 — 1
- De teller is 0 als $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ — 1
- Voor al deze waarden van x geldt: $\sin^2(x) = 1$ — 1
- (Voor al deze waarden van x geldt:) de noemer is 0 als $p = 1$ — 1
- $f_1(x) = \dfrac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)} = \dfrac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos(x)}$ — 1
- $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} f_1(x)$ (en de limiet voor de andere waarden van x) bestaat niet, dus de grafiek van f_1 heeft geen perforatie (dus er is geen waarde van p waarvoor de grafiek van f_p een perforatie heeft) — 1

of

- De teller en de noemer moeten (voor dezelfde waarde van x) gelijk zijn aan 0 — 1
- De teller is 0 als $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ — 1
- Voor al deze waarden van x geldt: $\sin^2(x) = 1$ — 1
- (Voor al deze waarden van x geldt:) de noemer is 0 als $p = 1$ — 1
- De onderbouwde constatering dat de grafiek van f_1 bij $x = \frac{1}{2}\pi$ (en voor de andere waarden van x) een verticale asymptoot heeft — 1
- Dus de grafiek van f_1 heeft geen perforatie (dus er is geen waarde van p waarvoor de grafiek van f_p een perforatie heeft) — 1

of

- De teller en de noemer moeten (voor dezelfde waarde van x) gelijk zijn aan 0 — 1
- De noemer is 0 als $\sin^2(x) = p$; dan geldt $\cos^2(x) = 1 - p$, dus $\cos(x) = \pm\sqrt{1-p}$ — 1
- De teller is voor zo'n waarde van x gelijk aan 0 als $p = 1$ — 1
- $f_1(x) = \dfrac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)} = \dfrac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos(x)}$ — 1
- $\cos(x) = 0$ als $x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot\pi$ — 1
- $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}\pi} f_1(x)$ (en de limiet voor de andere waarden van x) bestaat niet, dus de grafiek van f_1 heeft geen perforatie (dus er is geen waarde van p waarvoor de grafiek van f_p een perforatie heeft) — 1

Opmerking
Als de kandidaat de functies f_p niet op hun hele domein beschouwt en bij het oplossen van $\cos(x) = 0$ bijvoorbeeld alleen de oplossing $x = \frac{1}{2}\pi$ gebruikt, voor deze vraag hoogstens 5 scorepunten toekennen.

Uitwerking vraag 11:

$$f_p(x) = \frac{\cos(x)}{p - \sin^2(x)}$$

Er is een perforatie als:

$$teller = 0 \quad en \quad noemer = 0$$

$$\cos(x) = 0 \quad en \quad p - \sin^2(x) = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k\pi \qquad \sin^2(x) = p$$

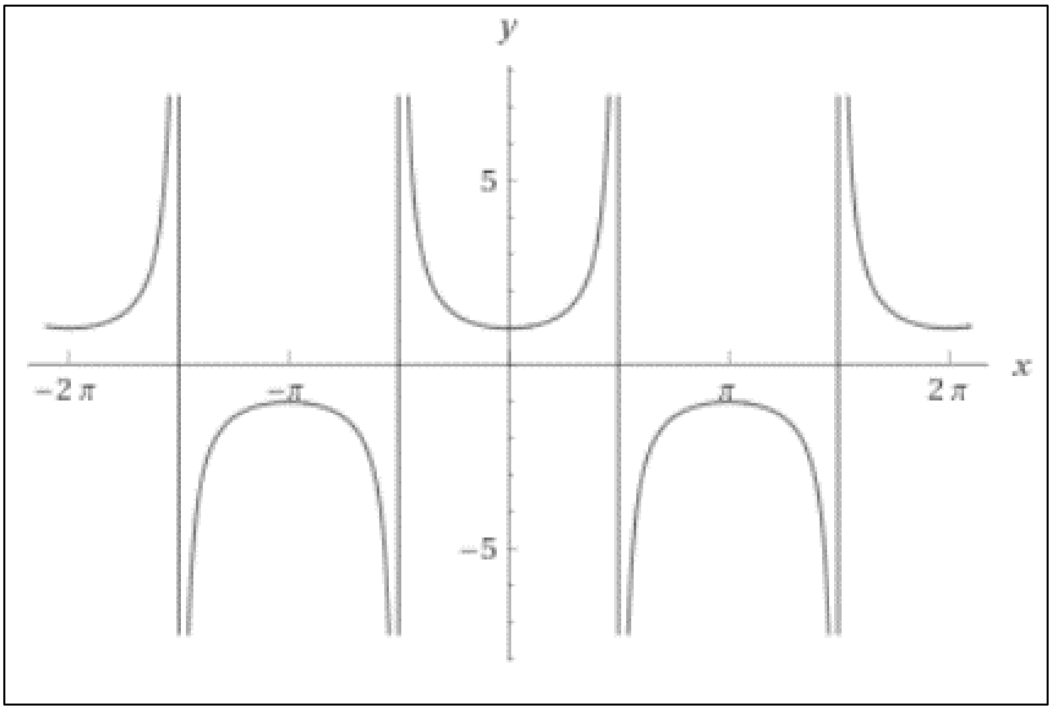
$x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ invullen geeft:

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\right) = p$$

$$p = 1$$

Als $p = 1$ is er een perforatie?

Plot de grafiek en zie dat er geen perforatie is:



Of:

$$f_1(x) = \frac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)} = \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} f_1(x) = \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)}$$

Deze limiet bestaat niet, dus de grafiek van f_1 heeft geen perforatie dus er is geen waarde van p met een f_p, zodat er geen perforatie is.

Vraag 12

Gebroken goniometrische functie

12 maximumscore 4

- De punten zijn $P\left(0, \frac{1}{p}\right)$, $Q\left(\pi, -\frac{1}{p}\right)$ en $R\left(2\pi, \frac{1}{p}\right)$ 1
- De richtingscoëfficiënt van PQ is $-\dfrac{2}{p\pi}$ en van QR $\dfrac{2}{p\pi}$ 1
- PQ en QR staan loodrecht op elkaar als $-\dfrac{2}{p\pi} \cdot \dfrac{2}{p\pi} = -\dfrac{4}{p^2\pi^2} = -1$ 1
- Hieruit volgt $p = -\dfrac{2}{\pi}$ of $p = \dfrac{2}{\pi}$ 1

of

- De punten zijn $P\left(0, \frac{1}{p}\right)$, $Q\left(\pi, -\frac{1}{p}\right)$ en $R\left(2\pi, \frac{1}{p}\right)$ 1
- $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} \pi \\ -\frac{2}{p} \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{2}{p} \end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{PQ}$ en $\overrightarrow{QR}$ staan loodrecht op elkaar als $\begin{pmatrix} \pi \\ -\frac{2}{p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{2}{p} \end{pmatrix} = \pi^2 - \dfrac{4}{p^2} = 0$ 1
- Hieruit volgt $p = -\dfrac{2}{\pi}$ of $p = \dfrac{2}{\pi}$ 1

of

- De punten zijn $P\left(0, \frac{1}{p}\right)$, $Q\left(\pi, -\frac{1}{p}\right)$ en $R\left(2\pi, \frac{1}{p}\right)$ 1
- Omdat driehoek PQR symmetrisch is ten opzichte van de verticale lijn door Q en $x_Q - x_P = \pi$, staan PQ en QR loodrecht op elkaar als ook $\left|y_P - y_Q\right| = \pi$ 1
- Dus als ($\left|\frac{1}{p} - -\frac{1}{p}\right| =$) $\left|\frac{2}{p}\right| = \pi$ 1
- Hieruit volgt $p = -\dfrac{2}{\pi}$ of $p = \dfrac{2}{\pi}$ 1

of

- De punten zijn $P\left(0, \frac{1}{p}\right)$, $Q\left(\pi, -\frac{1}{p}\right)$ en $R\left(2\pi, \frac{1}{p}\right)$ 1
- De lengte van PQ en van QR is $\sqrt{\pi^2 + \left(\frac{2}{p}\right)^2}$ (of het kwadraat is $\pi^2 + \left(\frac{2}{p}\right)^2$) 1
- PQ en QR staan loodrecht op elkaar als $\pi^2 + \left(\frac{2}{p}\right)^2 + \pi^2 + \left(\frac{2}{p}\right)^2 = (2\pi)^2$, dus als $\pi^2 = \dfrac{4}{p^2}$ 1
- Hieruit volgt $p = -\dfrac{2}{\pi}$ of $p = \dfrac{2}{\pi}$ 1

Uitwerking vraag 12:
PQ en QR staan loodrecht op elkaar, dan geldt:

$$rc.PQ * rc.QR = -1$$

Dus:

Punt P: $x = 0 \rightarrow y = \frac{\cos(0)}{p - \sin^2(0)} = \frac{1}{p}$ $\quad (0, \frac{1}{p})$

Punt Q: $x = \pi \rightarrow y = \frac{\cos(\pi)}{p - \sin^2(\pi)} = \frac{-1}{p}$ $\quad (\pi, -\frac{1}{p})$

Punt R: $x = 2\pi \rightarrow y = \frac{\cos(2\pi)}{p - \sin^2(2\pi)} = \frac{1}{p}$ $\quad (2\pi, \frac{1}{p})$

$$rc.PQ = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\frac{1}{p} - \frac{1}{p}}{\pi - 0} = -\frac{\frac{2}{p}}{\pi} = -\frac{2}{\pi p}$$

$$rc.QR = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{p} - -\frac{1}{p}}{2\pi - \pi} = \frac{\frac{2}{p}}{\pi} = \frac{2}{\pi p}$$

Er geldt:

$$rc.PQ * rc.QR = -1$$

$$-\frac{2}{\pi p} * \frac{2}{\pi p} = -1$$

$$-\frac{4}{\pi^2 p^2} = -1$$

Dus:

$$\pi^2 p^2 = 4$$

$$\pi p = 2 \qquad of \qquad \pi p = -2$$

$$p = \frac{2}{\pi} \qquad of \qquad p = -\frac{2}{\pi}$$

Vraag 13

Driehoek met bewegend hoekpunt

13 maximumscore 5

- Als P op lijn k ligt, vormen A, B en P niet de hoekpunten van een driehoek 1
- Een vergelijking van k is $y = 10 - \frac{1}{4}x$ 1
- P ligt op k als $30 - 3t = 10 - \frac{1}{4}(18 + 5t)$ 1
- Dit geeft $t = 14$ 1
- De coördinaten van P zijn dan $(88, -12)$ 1

of

- Als P op lijn k ligt, vormen A, B en P niet de hoekpunten van een driehoek 1
- Een vergelijking van k is $y = 10 - \frac{1}{4}x$ 1
- Een vergelijking van m is $y = -\frac{3}{5}x + 40\frac{4}{5}$ 1
- P ligt op k als $-\frac{3}{5}x + 40\frac{4}{5} = 10 - \frac{1}{4}x$ 1
- Dit geeft $x = 88$, waaruit volgt dat de coördinaten van P dan $(88, -12)$ zijn 1

Uitwerking vraag 13:
Er is geen driehoek als lijn m lijn n snijdt , voor lijn k geldt:

$$y = -\frac{1}{4}x + 10$$

Verder:

$$x = 18 + 5t$$

$$y = 30 - 3t$$

Invullen in de formule voor lijn k geeft:

$$30 - 3t = -\frac{1}{4}(18 + 5t) + 10$$

$$30 - 3t = -\frac{18}{4} - \frac{5}{4}t + 10$$

$$-3t + \frac{5}{4}t = -\frac{18}{4} + 10 - 30$$

$$-1\frac{3}{4}t = -24\frac{1}{2}$$

$$t = 14$$

Invullen geeft:

$$x_p = 18 + 5 * 14 = 88$$

$$y_p = 30 - 3 * 14 = -12$$

Dus de coördinaten van punt P zijn:

$$(88, -12)$$

Vraag 14

Driehoek met bewegend hoekpunt

14 maximumscore 8

- $\overline{AP} = \begin{pmatrix} 18+5t \\ 20-3t \end{pmatrix}$ — 1
- $\overline{BP} = \begin{pmatrix} -22+5t \\ 30-3t \end{pmatrix}$ — 1
- $\angle APB = 90°$, dus ($\overline{AP} \cdot \overline{BP} = 0$, dus) $(18+5t)(-22+5t)+(20-3t)(30-3t)=0$ — 1
- Herleiden tot $t^2-5t+6=0$ (of $34t^2-170t+204=0$) — 1
- Dit geeft $(t-3)(t-2)=0$ (of $t=\dfrac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1}$) — 1
- $t=2$ geeft $P(28, 24)$ en $t=3$ geeft $P(33, 21)$ — 1
- Berekenen van de lengtes van AP en BP (voor beide gevallen) — 1
- $AP \neq BP$, dus driehoek ABP is dan niet gelijkbenig (dus zo'n punt P is er niet) — 1

of

- AB is de diagonaal van het vierkant met hoekpunten A, B en P, dus P moet liggen op de andere diagonaal (de middelloodlijn van AB) op afstand $\frac{1}{2}AB$ van het midden van het vierkant — 1
- $M(20, 5)$ is het midden van lijnstuk AB (en van het vierkant) — 1
- $\overline{AM} = \begin{pmatrix} 20 \\ -5 \end{pmatrix}$ — 1
- Voor P moet gelden: $\overline{OP} = \overline{OM} + \overline{AM}_{\text{L}} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \end{pmatrix}$ waarbij $\overline{AM}_{\text{L}}$ de vector is die je krijgt als je vector $\overline{AM}$ 90° linksom draait — 2
- Een berekening die aantoont dat het punt $(25, 25)$ niet op lijn m ligt — 2
- De conclusie dat driehoek ABP dan niet gelijkbenig is (dus zo'n punt P is er niet) — 1

of

- $\angle APB = 90°$, dus P ligt op de cirkel met middellijn AB 1
- De cirkel met middellijn AB heeft vergelijking $(x-20)^2+(y-5)^2=425$ 1
- Snijden met lijn m geeft $(18+5t-20)^2+(30-3t-5)^2=425$ 1
- Herleiden tot $t^2-5t+6=0$ (of $34t^2-170t+204=0$) 1
- Dit geeft $(t-3)(t-2)=0$ (of $t=\dfrac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}$) 1
- $t=2$ geeft $P(28, 24)$ en $t=3$ geeft $P(33, 21)$ 1
- Berekenen van de lengtes van AP en BP (voor beide gevallen) 1
- $AP \neq BP$, dus driehoek ABP is dan niet gelijkbenig (dus zo'n punt P is er niet) 1

of

- $\angle APB = 90°$, dus $AP^2+BP^2=AB^2$ 1
- $(18+5t)^2+(20-3t)^2+(-22+5t)^2+(30-3t)^2=10^2+40^2=1700$ 2
- Herleiden tot $t^2-5t+6=0$ (of $68t^2-340t+408=0$) 1
- Dit geeft $(t-3)(t-2)=0$ (of $t=\dfrac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}$) 1
- $t=2$ geeft $P(28, 24)$ en $t=3$ geeft $P(33, 21)$ 1
- Berekenen van de lengtes van AP en BP (voor beide gevallen) 1
- $AP \neq BP$, dus driehoek ABP is dan niet gelijkbenig (dus zo'n punt P is er niet) 1

of

- Dan geldt $AP = BP$ 1
- $AP^2 = BP^2$ geeft $(18+5t)^2+(20-3t)^2=(-22+5t)^2+(30-3t)^2$ 1
- Herleiden tot $60t+724=-400t+1384$ 1
- Dit geeft $t=\frac{33}{23}$ $(=1{,}43...)$ 1
- $P(25\frac{4}{23}, 25\frac{16}{23})$ $(=(25{,}17...; 25{,}69...))$ 1
- $AP\ (=BP)=\sqrt{\left(25\frac{4}{23}\right)^2+\left(15\frac{16}{23}\right)^2}=\sqrt{880\frac{42}{529}}$ $(=29{,}66...)$ 1
- $AB=\sqrt{1700}$ $(=41{,}23...)$ 1
- $AB \neq AP\cdot\sqrt{2}$, dus hoek P is dan niet recht (dus zo'n punt P is er niet) 1

of

- Dan ligt P op de middelloodlijn van AB (want PA en PB zijn dan even lang) 1
- Een vergelijking van deze middelloodlijn is $y-5=4(x-20)$ (of $y=4x-75$) 1
- Snijden met lijn m geeft $30-3t-5=4(18+5t-20)$ 1
- Dit geeft $t=\frac{33}{23}$ $(=1{,}43...)$ 1
- Dus $P(25\frac{4}{23}, 25\frac{16}{23})$ $(=(25{,}17...; 25{,}69...))$ 1
- $AP^2=\left(25\frac{4}{23}\right)^2+\left(15\frac{16}{23}\right)^2=880\frac{42}{529}$ $(=880{,}07...)$ 1
- $AB^2=10^2+40^2=1700$ 1
- $1700 \neq 2\cdot880\frac{42}{529}$, dus hoek P is dan niet recht (dus zo'n punt P is er niet) 1

Uitwerking vraag 14:
Zijde AP ⊥ zijde BP
Dus $(\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}) = 0$.

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 18+5t \\ 30-3t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18+5t \\ 20-3t \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} 18+5t \\ 30-3t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22+5t \\ 30-3t \end{pmatrix}$$

Dus:

$$\left(\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}\right) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 18+5t \\ 20-3t \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -22+5t \\ 30-3t \end{pmatrix} = 0$$

$$(18+5t)(-22+5t) + (20-3t)(30-3t) = 0$$

$$-396 + 90t - 110t + 25t^2 + 600 - 60t - 90t + 9t^2 = 0$$

$$34t^2 - 170t + 204 = 0$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$(t-3)(t-2) = 0$$

$$t = 3 \quad \text{of} \quad t = 2$$

$t = 3$ geeft:

$$x_p = 18 + 5 * 3 = 33$$

$$y_p = 30 - 3 * 3 = 21$$

Dus punt P:

$$P = (33{,}21)$$

$t = 2$ geeft:

$$x_p = 18 + 5 * 2 = 28$$

$$y_p = 30 - 3 * 2 = 24$$

Dus punt P:

$$P = (28{,}24)$$

Voor deze P's is de hoek 90 graden. Hebben ze ook gelijke lengtes?

Voor $P = (33\,,21)$

$$|AP| = \sqrt{33^2 + 11^2} = 11\sqrt{10}$$

$$|BP| = \sqrt{7^2 + 21^2} = 7\sqrt{10}$$

Oftewel geen gelijke lengte.

Voor $P = (28\,,24)$

$$|AP| = \sqrt{28^2 + 14^2} = 14\sqrt{5}$$

$$|BP| = \sqrt{12^2 + 24^2} = 12\sqrt{5}$$

Oftewel geen gelijke lengte.
Dus geen gelijkbenige rechthoekige driehoek.

Vraag 15

15 maximumscore 7

- $V = \pi \int_a^b \left(\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van $\left(\sqrt{x}\right)^2$ $(= x)$ is $\frac{1}{2}x^2$ 1
- Dus $V = \pi(\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2)$ 1
- $m = \frac{1}{2}(a+b)$ 1
- $A = \pi \cdot \left(\sqrt{m}\right)^2 = \pi m = \pi \cdot \frac{1}{2}(a+b)$ 1
- $h = b - a$ 1
- $h \cdot A = (b-a) \cdot \pi \cdot \frac{1}{2}(a+b) = \pi \cdot \frac{1}{2}(b^2 - a^2) = \pi(\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2)$ $(= V)$ 1

of

- $V = \pi \int_a^b \left(\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van $\left(\sqrt{x}\right)^2$ $(= x)$ is $\frac{1}{2}x^2$ 1
- $a = m - \frac{1}{2}h$ en $b = m + \frac{1}{2}h$ 1
- Dus $V = \frac{1}{2}\pi\left((m + \frac{1}{2}h)^2 - (m - \frac{1}{2}h)^2\right)$ 1
- $V = \frac{1}{2}\pi(2mh) = \pi mh$ 1
- $A = \pi \cdot \left(\sqrt{m}\right)^2 = \pi m$ 1
- Dus $h \cdot A = h \cdot \pi m$ $(= V)$ 1

Uitwerking vraag 15:

$$V = \pi \int_a^b \left(\sqrt{x}\right)^2 dx$$

$$V = \pi \int_a^b x \, dx$$

$$V = \pi \left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b$$

$$V = \frac{1}{2}\pi b^2 - \frac{1}{2}\pi a^2$$

Oftewel:

$$V = \frac{1}{2}\pi(b^2 - a^2)$$

A=oppervlakte van de cirkel met $M = (m, \sqrt{m})$
Dus een cirkel met straal $\sqrt{m}$

$$A = \pi r^2$$

$$A = \pi(\sqrt{m})^2$$

$$A = \pi m$$

m ligt midden tussen a en b in dus $m = \frac{a+b}{2}$

Oftewel:

$$m = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$$

Dus:

$$A = \ \pi(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b)$$

$$A = \frac{1}{2}\pi(a + b)$$

Gegeven is:

$$h = b - a$$

$$V = h * A$$

$$V = (b - a) * \frac{1}{2}\pi(a + b)$$

$$V = \frac{1}{2}\pi(b + a)(b - a)$$

$$V = \frac{1}{2}\pi(b^2 - a^2)$$

Dus:

$$V = h * A$$

Quickstart handleiding grafische rekenmachines

Grafische rekenmachine TI-84 plus

BASISKNOPPEN

Om de grafische rekenmachine goed te kunnen gebruiken moet je natuurlijk eerst alles weten van de basisknoppen. Hieronder zie je de belangrijkste knoppen om zo uiteindelijk een expert te worden in de TI-84 plus:

ON	Zet de GR aan. Als de GR aan is en je drukt erop zorgt deze knop ervoor dat de GR stopt met het tekenen van een grafiek.
2nd ON	Zet de GR uit.
2nd MODE	Je gaat terug naar je scherm.
ENTER	Maakt commando's en evalueert vergelijkingen.
CLEAR	Schoonmaken scherm.
DEL	Deletet het tekentje onder het pijltje.
2nd	Hiermee kun je de secondaire functies openen.
ALPHA	Hiermee activeer je de groene letters boven de knopjes.
2nd ENTER	Kopieert de laatste regel in het scherm.
2nd (-)	Plakt de laatste regel in een vergelijking.
STO➡	Koppelt een waarde aan een variabele.
2nd +	Maakt het geheugen leeg .
MATH	Onder deze knop kun je veel wiskundige bewerkingen vinden.
MODE FLOAT	Hier kun je het aantal decimalen instellen door met de cursor het getal aan te klikken.
2nd⬆	Schermcontrast wordt donkerder.
2nd⬇	Schermcontrast wordt lichter.
MODE Radian Degree	Hier kun je instellen of je in radialen of in graden alles wilt uitrekenen.

Er is een aantal belangrijke functies dat je vaker gebruikt dan andere. Hieronder de functies die het belangrijkste zijn om snel te weten:

ALPHA 3	θ
2nd ^	π
2nd :	e
2nd LN	e^x
2nd LOG	10^x
2nd X^2	$\sqrt{}$

FUNCTIES

Breuken

Je kunt breuken intypen door letterlijk de breuk over te typen. Breuken met een geheel getal (bijvoorbeeld $4\frac{1}{2}$) erin typ je als volgt:

```
4+1:2
```

Je hebt ook een hele handige functie op de GR zitten om makkelijk een breuk uit te rekenen of om een getal om te zetten naar een breuk:

MATH 1: van een decimaal getal naar een breuk
MATH 2: van een breuk naar een decimaal getal

Wortels

Ook wortels kun je op twee manieren typen. Aangezien $\sqrt{x} = x^{0,5}$ kun je simpelweg gewoon in je rekenmachine typen:

```
X^0.5
```

Je kunt ook de functie **MATH 5** gebruiken om een wortel in te typen.

Logaritmes

Een logaritme kun je ook wel zo schrijven:

$$^{a}log(b) = \frac{log(b)}{log(a)}$$

Voor bijvoorbeeld $^{3}log(5)$ vul je dus in je rekenmachine:

```
log(5)/log(3)
```

TABELLEN

De eerste stap in een probleem dat te maken heeft met een tabel is om de vergelijking in te vullen. Op de TI-84 plus ga je hiervoor naar de **Y=** knop. Hier kun je de functie invoeren in een van de lijnen:

Plot1	Plot2 Plot 3
$\backslash\mathbf{Y}_1 =$	X^2-8
$\backslash\mathbf{Y}_2 =$	
$\backslash\mathbf{Y}_3 =$	
$\backslash\mathbf{Y}_4 =$	

Als je de functie hebt ingetypt kun je op de **2nd GRAPH**-knop drukken. Dit is de knop voor de tabel. Hier kun je met behulp van de pijltjes door de tabel lopen. Met behulp van **2nd WINDOM (=TBLSET)** kun je de startwaarde en stapgrootte van de tabel aanpassen.

X	Y1	
-3	1	
-2	-4	
-1	-7	
0	-8	
1	-7	
2	-4	
3	1	

GRAFIEKEN

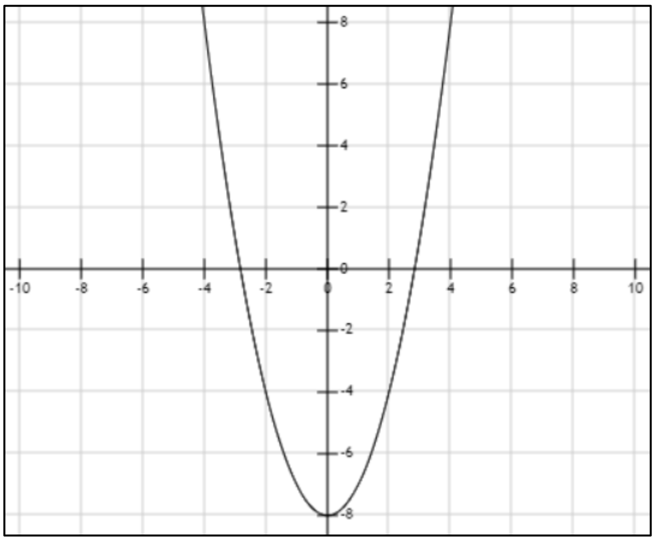
Het voordeel van een grafische rekenmachine is dat het makkelijk is om grafieken te maken en zo de functies beter te begrijpen. In dit hoofdstuk leggen we je uit hoe de standaardoperaties gedaan kunnen worden met behulp van grafieken. We gaan je uitleggen hoe je een minimum en maximum kunt zien in een grafiek met behulp van de TI-84 plus en hoe je snij- en nulpunten bepaalt.

Grafiek tekenen

De eerste stap in een probleem dat te maken heeft met een grafiek is om een grafiek te tekenen. Op de TI-84 plus ga je hiervoor naar de **Y=** knop. Hier kun je de functie invoeren in een van de lijnen:

Plot1	**Plot2 Plot 3**
\\Y_1 =	X^2-8
\\Y_2 =	
\\Y_3 =	
\\Y_4 =	

Als je de functie hebt ingetypt kun je op de **GRAPH**-knop drukken. De GR tekent dan een grafiek voor je:

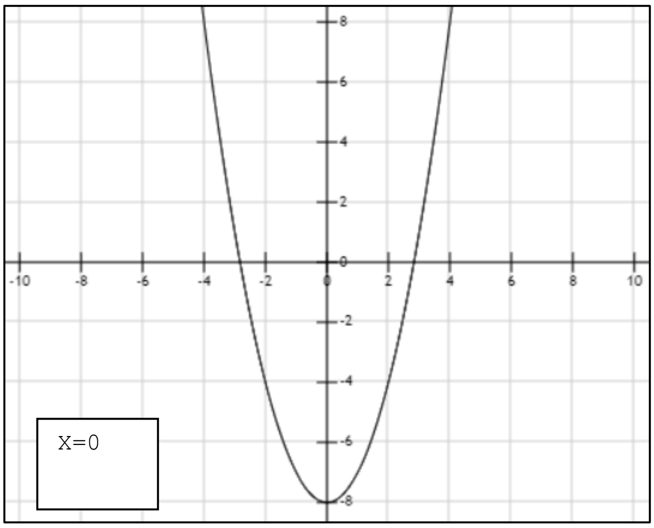


Snijpunt vinden

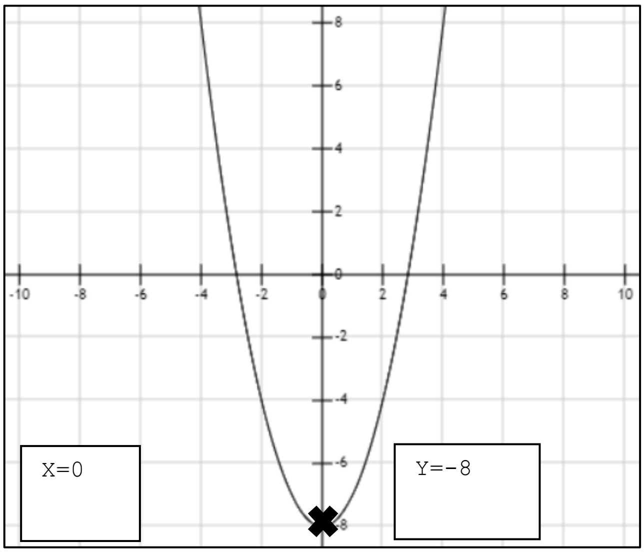
Het snijpunt met de $y-as$ in het punt waar $x = 0$. Hier een stappenplan om dit via je GR te bepalen:

	Knop	
1.	Y=	Vul de functie in op je GR.
2.	2nd TRACE	Je komt nu uit op het **CALCULATE-**window.
3.	value	Druk vervolgens op **ENTER.**

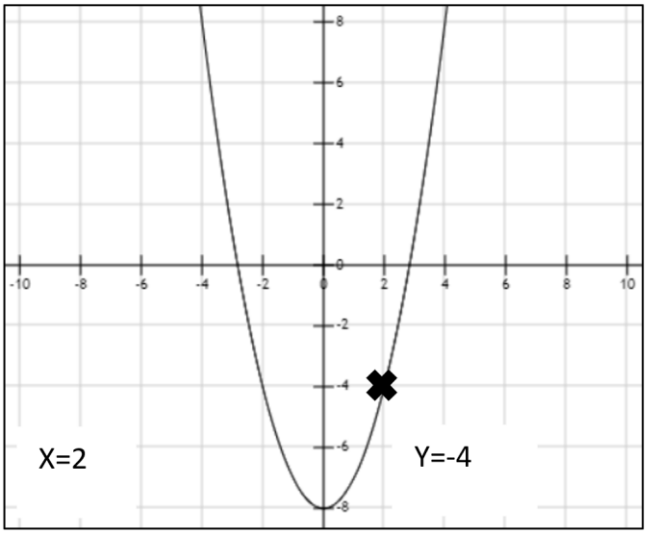
Dit zorgt ervoor dat je teruggaat naar de grafiek. Onderaan zie je **X=** staan. Typ hierin 0 en druk vervolgens op ENTER.



Je ziet nu een pijltje op de grafiek, waar het snijpunt met de y-as is, samen met de x- en y –coördinaten van het punt.



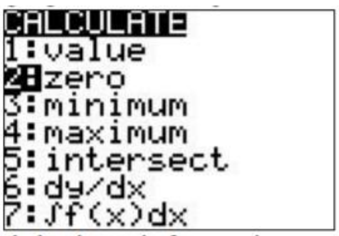
Tip! Je kunt dus ook een andere waarde bij **X=** intypen, als je bijvoorbeeld de y-waarde wilt weten voor $x = 2$:



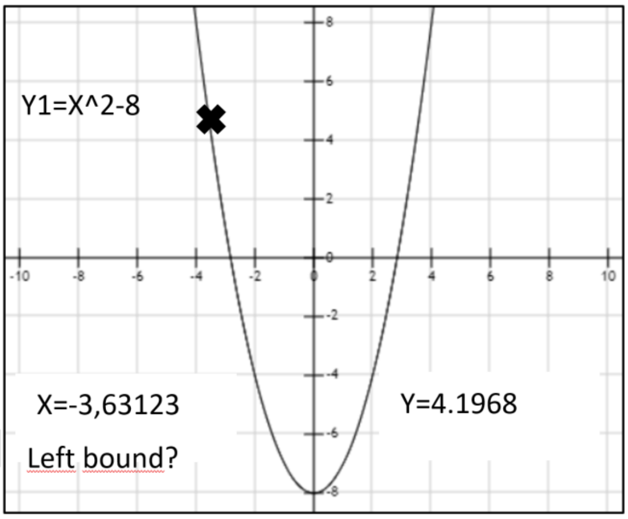
Nulpunten zoeken

De nulpunten van een grafiek zijn de punten waar de grafiek de x-as kruist. Hier is y dus altijd gelijk aan nul. De methode die hiervoor wordt gebruikt gaat als volgt:

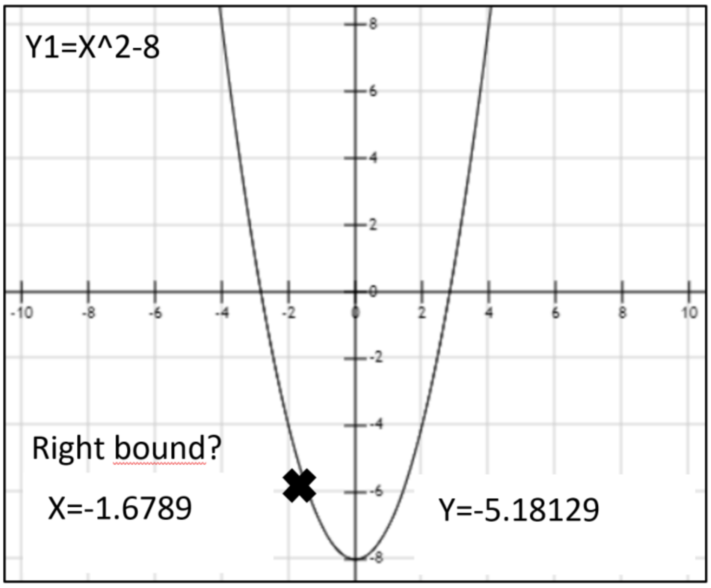
	Knop	
1.	Y=	Vul de functie in op je GR.
2.	2nd TRACE	Je komt nu uit op het **CALCULATE-**window.
3.	zero	Druk vervolgens op **ENTER.**



Dit zorgt ervoor dat je teruggaat naar de grafiek. Nu vraagt de GR echter eerst om de **Left Bound** te identificeren. Dit kun je makkelijk doen. Je gaat met je pijltje naar een punt links van het punt dat je wilt weten (in dit geval $x = 0$). Druk vervolgens op **ENTER.**

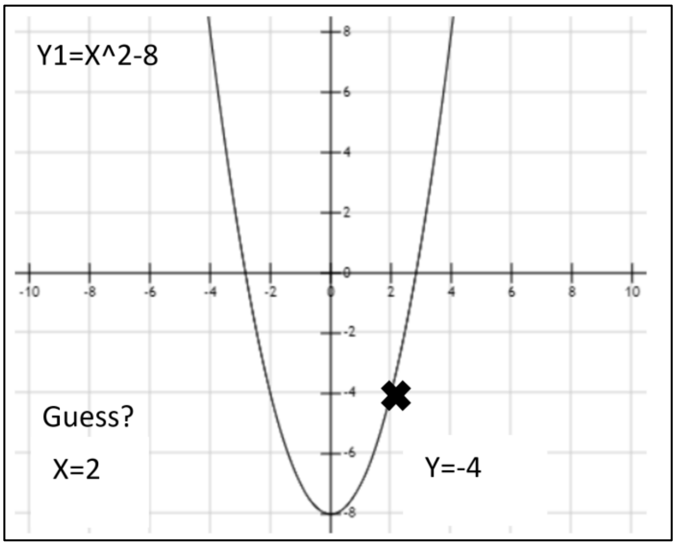


Vervolgens vraagt de GR voor Right Bound. Dit is dus een punt rechts van het punt dat je wilt weten (in dit geval $x = 0$). Druk vervolgens op ENTER.

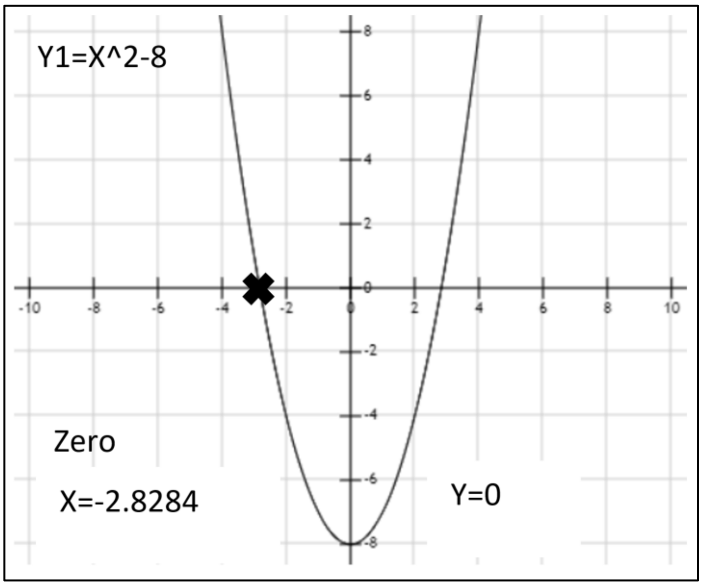


Nu staan er twee pijltje op je scherm. Als ze correct zijn ingevoerd wijzen ze naar elkaar. Anders krijg je een error-bericht en moet je de **zero-**functie opnieuw doen.

Vervolgens vraagt de GR Guess. Hiermee raad je waar het punt ongeveer ligt (dit is dus altijd tussen de twee pijlen in!). Druk vervolgens op **ENTER.**



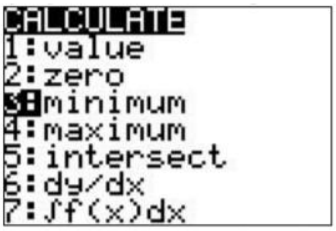
Hierna krijg je te zien op welk punt y=0.



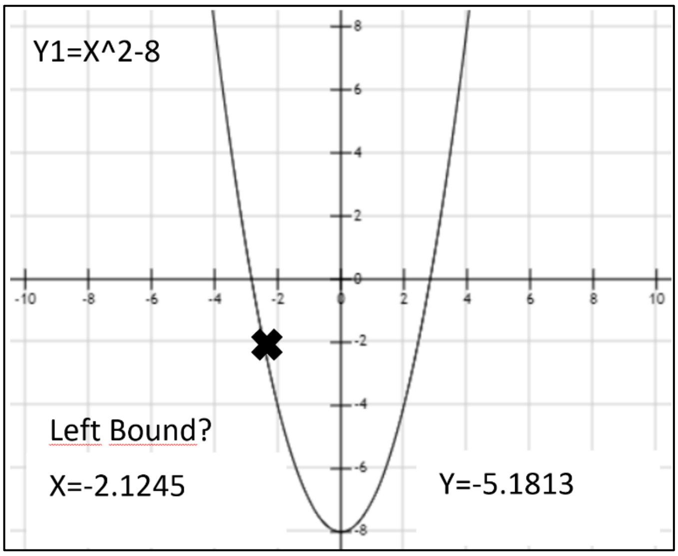
Minimum/maximum zoeken van een grafiek

Het minimum van een grafiek is het punt met de laagste y-waarde. Het maximumpunt is het punt met de hoogste y-waarde. Hier gaan we weer bijna dezelfde stappen maken als hierboven, maar nu gebruiken we de **maximum-** en **minimum**functies:

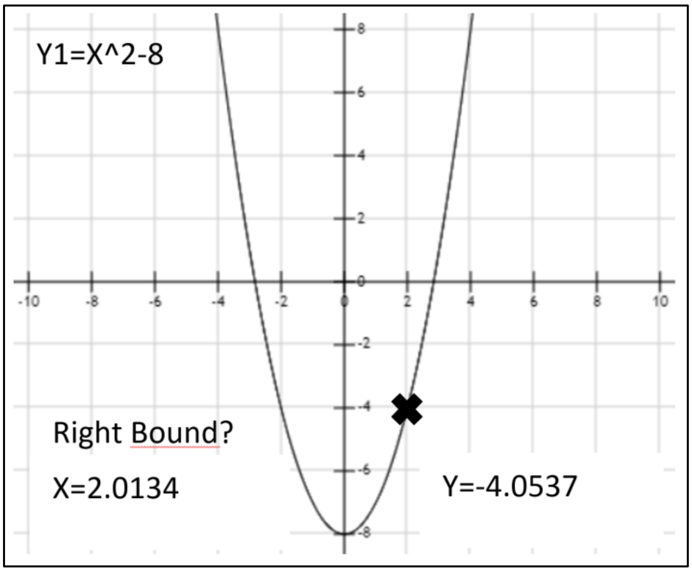
	Knop	
1.	Y=	Vul de functie in op je GR.
2.	2nd TRACE	Je komt nu uit op het **CALCULATE-**window.
3.	zero	Druk vervolgens op **ENTER.**



Beweeg de pijl weer langs de grafiek om aan te duiden wat de linkerkant is van het minimum. Druk vervolgens op **ENTER.**

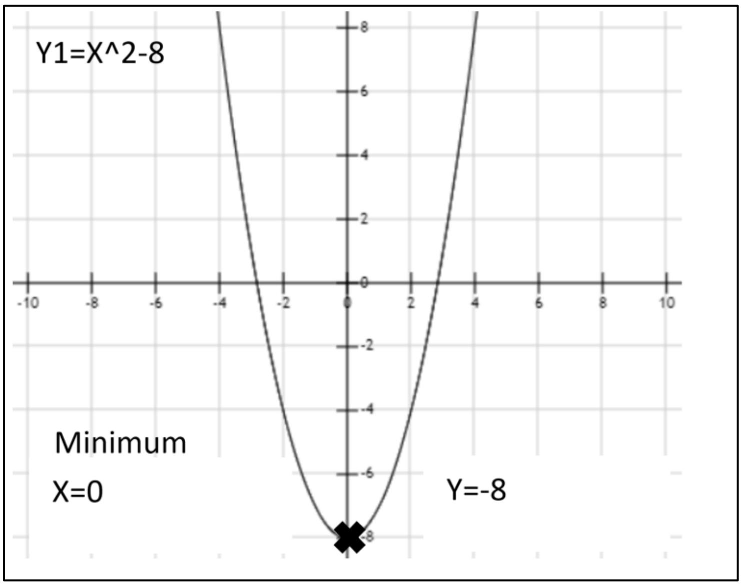


Vervolgens vraagt de GR voor **Right Bound.** Verplaats het pijltje nu naar het punt dat je wilt weten. Dit is dus een punt rechts van het minimum. Druk vervolgens op **ENTER.**



Nu staan er twee pijltje op je scherm. Als ze correct zijn ingevoerd wijzen ze naar elkaar. Anders krijg je een error-bericht en moet je de **minimum**functie opnieuw doen.

Vervolgens vraagt de GR Guess. Verplaats het pijltje nu naar het punt dat je wilt weten. Hiermee raad je waar het punt ongeveer ligt (dit is dus altijd tussen de twee pijlen in!). Druk vervolgens op **ENTER.**


Y1=X^2-8
Minimum
X=0
Y=-8

Grafische rekenmachine CASIO

BASISKNOPPEN

Om de grafische rekenmachine goed te kunnen gebruiken moet je natuurlijk eerst alles af weten van de basisknoppen. Hieronder zie je de belangrijkste knoppen om zo uiteindelijk een expert te worden in de Casio (fx-9860GII)

AC/ON	Zet de GR aan. Als de GR aan is en je drukt erop zorgt deze knop ervoor dat de GR stopt met het tekenen van een grafiek.
SHIFT AC/ON	Zet de GR uit.
EXE	Maakt commando's en evalueert vergelijkingen.
AC/ON	Schoonmaken scherm.
DEL	Deletet het tekentje onder het pijltje.
SHIFT	Hiermee kun je de secondaire functies openen.
ALPHA	Hiermee activeer je de rode letters boven de knopjes.
ALPHA A EXE	Koppelt een waarde aan een variabele (in dit geval A).
MENU MEMORY EXE	Maakt het geheugen leeg.
	Onder deze knop kun je veel wiskundige bewerkingen vinden.
SHIFT MENU	Gebruik display om bij FIX(F1) het aantal decimalen in te stellen.
MENU SYSTEM	**F1:** Schermcontrast instellen.
SET UP ANGLE	Hier kun je instellen of je in radialen (Rad) of in graden (Deg) alles wilt uitrekenen.

Er is een aantal belangrijke functies dat je vaker gebruikt dan anderen. Hieronder de functies die het belangrijkste zijn om snel te weten:

ALPHA ^	θ
SHIFT EXP	π
SHIFT LN	e^x
SHIFT LOG	10^x
SHIFT x^2	$\sqrt{}$

FUNCTIES

Breuken

Je kunt breuken intypen door letterlijk de breuk over te typen. Breuken met een geheel getal (bijvoorbeeld $4\frac{1}{2}$) erin typ je als volgt:

```
4+1:2
```

Je hebt ook een hele handige functie op de GR zitten om makkelijk een breuk uit te rekenen of om een getal om te zetten naar een breuk:

F <-> D: Van een decimaal getal naar een breuk en omgekeerd

Wortels

Ook wortels kun je op twee manieren typen. Aangezien $\sqrt{x} = x^{0,5}$ kun je simpelweg gewoon in je rekenmachine typen:

```
X^0.5
```

Je kunt ook de functie **SHIFT ^** gebruiken om een wortel in te typen.

Logaritmes

Een logaritme kun je ook wel zo schrijven:

$$^{a}log(b) = \frac{log(b)}{log(a)}$$

Voor bijvoorbeeld $^{3}log(5)$ vul je dus in je rekenmachine:

```
log(5)/log(3)
```

TABELLEN

De eerste stap in een probleem dat te maken heeft met een tabel is om de vergelijking in te vullen. Op de GR ga je hiervoor naar de **MENU TABLE Y=** knop. Hier kun je de functie invoeren in een van de lijnen:

Graph	Func :Y=
Y1=	X^2-8
Y2=	
Y3=	
Y4=	

Als je de functie hebt ingetypt kun je op de **MENU TABLE TABL-**knop drukken. Dit is de knop voor de tabel. Hier kun je met behulp van de pijltjes door de tabel lopen. Met behulp van **SET of RANGE** kun je de startwaarde en stapgrootte van de tabel aanpassen.

X	Y1	
-3	1	
-2	-4	
-1	-7	
0	-8	
1	-7	
2	-4	
3	1	

GRAFIEKEN

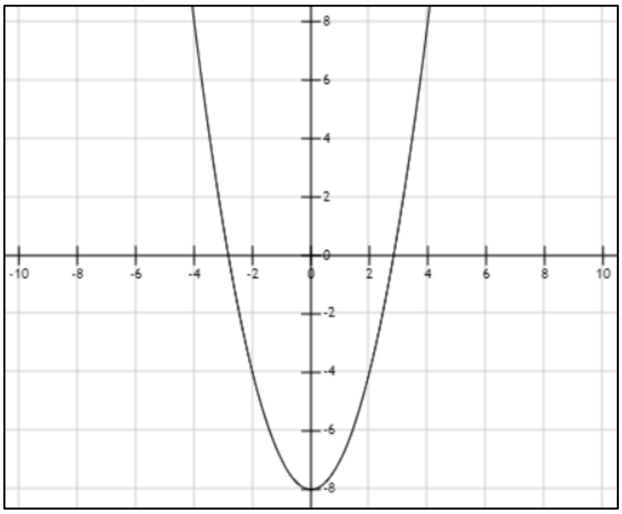
Het voordeel van een grafische rekenmachine is dat het makkelijk is om grafieken te maken en zo de functies beter te begrijpen. In dit hoofdstuk leggen we je uit hoe de standaardoperaties gedaan kunnen worden met behulp van grafieken. We gaan je uitleggen hoe je een minimum en maximum kunt zien in een grafiek met behulp van Casio en hoe je snij- en nulpunten bepaalt.

Grafiek tekenen

De eerste stap in een probleem dat te maken heeft met een grafiek is om een grafiek te tekenen. Op de Casio ga je hiervoor naar de **MENU GRAPH Y=** knop. Hier kun je de functie invoeren in een van de lijnen:

Graph	**Func :Y=**
Y1=	X^2-8
Y2=	
Y3=	
Y4=	

Als je de functie hebt ingetypt kun je op de **DRAW**-knop drukken. De GR tekent dan een grafiek voor je:



Snijpunt vinden

Hier een stappenplan om snijpunten via je GR te bepalen:

	Knop	
1.	MENU GRAPH Y=	Vul de functie in op je GR.
2.	WINDOW	Zorg dat de punten in de grafiek te zien zijn.
3.	G-Solv	Druk vervolgens op **ISCT.** Deze geeft je de coördinaten.

Nulpunten zoeken

De nulpunten van een grafiek zijn de punten waar de grafiek de x-as kruist. Hier is y dus altijd gelijk aan nul. De methode die hiervoor wordt gebruikt gaat als volgt:

	Knop	
1.	MENU GRAPH Y=	Vul de functie in op je GR.
2.	WINDOW	Zorg dat de punten in de grafiek te zien zijn.
3.	G-Solv	Druk vervolgens op **ROOT EXE.** Deze geeft je de coördinaten van de nulpunten.

Minimum/maximum zoeken

Het minimum van een grafiek is het punt met de laagste y-waarde. Het maximumpunt is het punt met de hoogste y-waarde. Hier gaan we weer bijna dezelfde stappen maken als hierboven, maar nu gebruiken we de **maximum-** en **minimum**functies:

	Knop	
1.	MENU GRAPH Y=	Vul de functie in op je GR.
2.	WINDOW	Zorg dat de punten in de grafiek te zien zijn.
3.	G-Solv	Druk vervolgens op de **MIN EXE** of op **MAX EXE.** Deze geeft je de coördinaten van het minimum of maximum.